Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Tutorial 9
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

11 Μαιου 2018

1. Εστω η γνωστή παραγοντοποίηση $A = QR$. Εαν ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος, θετω $A_1 = RQ$. Να αποδείξετε οτι οι πίνακες A, A_1 είναι όμοιοι.

Λυση:

Εχουμε οτι $A_1 = RQ = Q^{-1}QRQ = Q^{-1}AQ$ επομένως είναι όμοιοι.

◁

2. Εστω $B_{n\times n}$ συμμέτρικος πίνακας και $B^2 = B$. (Επομένως ο B είναι ορθογώνια προβολή).
Εστω ενα $y \in \mathbb{R}^n$ και θετουμε $\hat{y} = By$ και $z = y - \hat{y}$.
Να δείξετε οτι $\hat{y} \perp z$, δηλαδή οτι

$$y = By + z, \quad By \perp z.$$

Λυση:

Αρχικά έχουμε οτι

$$B^\top B = B \cdot B = B^2 = B \tag{1}$$

Για να δειξουμε οτι το $\hat{y}$ και το z είναι κάθετα αρκεί να δείξουμε οτι $\langle \hat{y}, z\rangle = 0$. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\begin{aligned}
\langle z, \hat{y}\rangle &= \langle y - \hat{y}, By\rangle \\
&= y(By) - \hat{y}(By) \\
&= y^\top By - \hat{y}^\top By \\
&= y^\top By - (By)^\top By \\
&= y^\top By - y^\top B^\top By \\
&= y^\top By - y^\top B^2 y \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}$$

Αρα είναι κάθετα.

◁

3. Εστω ο στοχαστικός πίνακας

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \Phi1 & \Phi2 & \Phi3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \Phi1 \\ \Phi2 \\ \Phi3 \end{array} \end{array}$$

ο οποίος εκφράζει τις διατροφικές προτιμήσεις ενος ατόμου για Φ_i με $i = 1, 2, 3$ διαφορετικά φαγητά. Αν υποθέσουμε οτι την πρώτη μέρα πάρει το φαγητό Φ_1.

(α) Δίνεται οτι οι ιδιοτιμές είναι οι 1, 0.2 , 0.5. Να Βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα.
(β) Διαγωνοποιείται ο πίνακας; Γράψτε την διαγωνοποιηση.
(γ) Πως κατανέμονται οι πιθανότητες των φαγητών μετά απο πολλές μέρες; $(n \to \infty)$

Λυση:

(α) Εχουμε για την $\lambda = 1$ οτι

$$A\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x/3 \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για την $\lambda = 0.2$ οτι

$$A\boldsymbol{v} = 0.2\boldsymbol{v} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για την $\lambda = 0.5$ οτι

$$A\boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{w} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} z/2 \\ -3z/2 \\ z \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(β) Ναι, διαγωνοποιειται αφου έχουμε 3 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Θα έχουμε λοιπόν οτι

$$A = P\Delta P^{-1} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(γ) Έχουμε ενα δυναμικό συστημα της μορφής

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Αρα

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P\Delta P^{-1} \\ \Leftrightarrow x_{k+1} &= P\Delta^k P^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Οπότε μετά απο n μέρες θα έχουμε οτι

$$x_n = P\Delta^n P^{-1} x_0 \Rightarrow x_n = P \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.5^n \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αφήνοντας το $n \longrightarrow \infty$ θα έχουμε οτι

$$x^* = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

οπου και αυτή είναι η κατάνομη των πιθανοτήτων των φαγητών μετα απο πολλές μέρες.

◁

4. Εαν οι ιδιοτιμες του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ είναι -6 και κ και τα ιδιοδιανύσματα $(1, 3)^T \quad (-3, 1)^T$ να βρεθεί το κ και στη συνέχεια ο πίνακας A^{10}

Λύση:

Ισχύει οτι $\Sigma\lambda_i = trace(A) \Rightarrow k = 4$.
Αφού διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A, παίρνουμε

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{10} = A = PD^{10}P^{-1}$$

με $D = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ και $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε (α) τις ιδιοτιμες του, (β) τον A^{-1} συναρτήσει του A και
(γ) την ποσότητα $A^3 - 3A^2 + 2A - I$.

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$$

(β) Ξερουμε οτι απο το θεωρημα Cayley-Hamilton ο πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αρα έχουμε

$$A^2 - 5A + 6I = 0 \Rightarrow A^2 = 4I \Rightarrow A(\frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A) = I$$

Επομένως, $A^{-1} = \frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A$

(γ) Για την ζητουμενη ποσότητα θα πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων.
Παίρνουμε λοιπον οτι $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x - 5) + 36x - 121$. Αντικαθιστώντας οπου x το A και λαμβάνοντας υποψη μας το θεωρημα Cayley-Hamilton (ο πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο) έχουμε οτι

$$A^3 - 3A^2 + 2A - I = 36A - 121I.$$

$\triangleleft$