Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Tutorial 4
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

20 Μαρτίου 2018

1. Έστω ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε τον A^{20}.
Λυση:
Αρχικά θα διαγωνόποιησουμε τον A. Ας βρούμε λοιπόν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του. Εχουμε ότι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \text{Sarrus} \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.\lambda = 4$$

Παρατηρούμε οτι κάποια ιδιοτιμή είναι μηδενική αρα καταλαβαίνουμε οτι ο A δεν αντιστρεφεται, πράγμα που περιμέναμε βλέποντας οτι 2 στήλες του είναι συγγραμικές αυτό όμως είναι κάτι που δεν μας επηρεάζει στην διαγωνοποιήση. Ας βρούμε όμως τα ιδιοδιανύσματα.
Για $\lambda = 0$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} \Rightarrow A\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 1$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} \Rightarrow A\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 4$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{w} = 4\boldsymbol{w} \Rightarrow A\boldsymbol{w} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Οπότε αφού ισχυεί οτι $A = P\Delta P^{-1}$ για $k, z, \mu = 1$ προκύπτει οτι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Γνωρίζουμε οτι ισχυει $A^n = P\Delta^n P^{-1}$ και ετσι τώρα μπορουμε να υπολογίσουμε εύκολα τον A^{20} υψώνοντας τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα Δ στην συγκεκριμένη δύναμη.

◁

2. Έστω
$$F(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x2$$
Να βρέθει η κανονική μορφη.
Λύση:
Αρχικά, ας σχηματίσουμε τον πίνακα της παραπάνω συνάρτησης. Έχουμε λοιπόν οτι
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Παράλληλα, ας βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανυσματα του παραπάνω πίνακα

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \text{Sarrus} \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda=3, \lambda=6, \lambda=9$$

Για $\lambda = 3$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2k \\ 2k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 6$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} z \\ -2z \\ -2z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 9$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{w} = 9\boldsymbol{w} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ 2\mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Εστω $k, z, \mu = 1$, έτσι προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Κανονικοποιώντας τα, προκύπτει οτι

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

Οπότε έχουμε οτι

$$Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Θυμομαστε οτι $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, έτσι θέτωντας $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ οπου $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, προκύπτει η παρακάτω κανονική μορφή:

$$f(\boldsymbol{y}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$

$\triangleleft$

4. Να βρέθει ο πίνακας 2×2 με ιδιοτιμες $1, 4$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Λύση:

Τα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ όπως παρατηρούμε είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο ζητούμενος πίνακας διαγωνοποιείται. Οποτε έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Δεδομένου οτι ο πίνακας P είναι 2×2, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον αντίστροφο του. Εχουμε

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Αρα ο ζητούμενος πίνακας θα είναι

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$\triangleleft$

5. Εστω ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε την τιμή του $A^{100} + A^{81} - 2I$.

Λύση:
Ας βρούμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \Big(\frac{1}{2} - \lambda\Big)\Big(-\frac{1}{2} - \lambda\Big) + \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1$$

Ετσι απο το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε οτι $A^2 - I = \mathbb{O}$. Διαιρώντας το ζητούμενο πολυώνυμο με έκεινο που προκύπτει απ το θεώρημα C-H και εκμεταλλευόμενοι την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης προκύπτει οτι $x^{100} + x^{81} - 2 = (x^2 - 1)p(x) + ax + b$ οπου $p(x)$ το πηλίκο και $ax + b$ το υπόλοιπο. Και έτσι έχουμε:

$$A^{100} + A^{81} - 2I = (A^2 - I)p(A) + A - I = A - I$$

$\triangleleft$

6. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Να βρέθούν οι A^{100}, A^{-1} και το $A^4 + A^3 - A^2 + A + I$.

Λύση:
Για τον A^{100} ας διαγώνοποίησουμε τον πίνακα. Κατα την σύνηθη διαδικάσια θα πρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα. Έχουμε λοιπόν για τις ιδιοτιμές οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 5$$

Για τα ιδιοδιάνυσματα έχουμε:
- για $\lambda = 1$,

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \ \text{π.χ.} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- για $\lambda = 5$,

$$A\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x \\ 5y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \mu \\ 3\mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \ \text{π.χ.} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πίνακας A μπόρει να γράφει ως

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Έτσι, για τον A^{100} το μόνο πού έχουμε να κάνουμε είναι να υφώσουμε στην 100-στη δύναμη τα στόιχεια του Δ, δηλάδη

$$A^{100} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Για τον A^{-1}, ας θυμηθούμε το θεώρημα Cayley- Hamilton. Πιο συγκεκριμένα, βάσει του C-H ο πίνακας A “ μηδένιζει ” το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλάδη

$$A^2 - 6A + 5I = \mathbb{O} \tag{1}$$

Με λίγη άλγεβρα μπόρουμε να δούμε οτι

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 5I &= \mathbb{O} \\ A^2 - 6A &= -5I \\ A(A - 6I) &= -5I \\ A\Big(-\frac{1}{5}A + \frac{6}{5}I\Big) &= I \\ \text{Άρα} \quad A^{-1} &= -\frac{1}{5}A + \frac{6}{5}I \end{aligned}$$

Για να υπόλογισουμε την ποσότητα $A^4 + A^3 - A^2 + A + I$, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να την διαιρέσουμε με το χαρακτηριστικό πολύωνυμο. Κανόντας αυτήν την διαίρεση πολύωνυμων και απο την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης προκύπτει ότι

$$A^4 + A^3 - A^2 + A + I = (A^2 + 6A - 5I)(A^2 + 7A + 36I) + 182A + 179I$$

Όμως απο το θεώρημα Cayley-Hamilton γνώριζουμε οτι $A^2 + 6A - 5I = \mathbb{O}$, αρα

$$A^4 + A^3 - A^2 + A + I = 182A + 179I$$

$\triangleleft$