TUTORIAL 5a

1) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Η συνάρτηση είναι C^2 τάξης στο $\mathbb{R}^3$ και οι πρώτες μερικές παράγωγοι της είναι οι

$f_x = 4x^3 - 4(x-y), \quad f_y = 4y^3 + 4(x-y)$.

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = x - x^3 \end{cases}$$

Από αυτό προκύπτουν τα στάσιμα σημεία: $(x,y) = (0,0)$ ή $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ή $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Υπολογίζουμε τον πίνακα $2^{ης}$ παραγώγου, που είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

• Για το σημείο Α $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσες $A_1 = 20$, $A_2 = 384$ άρα είναι θετικά ορισμένος.

Επομένως στο σημείο Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι ίσο με

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

• Για το σημείο Β $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσες $A_1 = 20$, $A_2 = 384$ άρα είναι θετικά ορισμένος.

Επομένως στο σημείο Β παρουσιάζει επίσης τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$

• Για το σημείο Ο(0,0) αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσα του Α είναι μηδέν, επομένως με την μέθοδο αυτή δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το σημείο Ο είναι τοπικό ακρότατο ή όχι.

Τελικά με άλλη μέθοδο που ξεφεύγει από το μάθημα αποδεικνύεται ότι το σημείο αυτό είναι σημείο σέλας.