ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ- ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ιδιοτιμή ονομάζεται ένας αριθμός λ αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα στήλη $\vec{u}$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{A\vec{u}=\lambda\vec{u}}$$

Η σχέση αυτή μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί και $(A-\lambda I)\vec{u}=0$.

Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται **φάσμα σ(A)** του πίνακα A.

Το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ.

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**</u> Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας επί ενός σώματος F και $\lambda\in F$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο $\lambda\in F$ είναι ιδιοτιμή του A.

2) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A-\lambda I)X=0$ έχει μη μηδενικές λύσεις

3) Ο πίνακας $A-\lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμος

4) **Η ορίζουσα του $A-\lambda I$ είναι μηδενική**.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$. Τότε, $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{bmatrix}$.

Έτσι, det($A-\lambda I$)=0 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow ....\lambda=3,\ \lambda=-2$.

Άρα, σ(A) = {-2, 3}.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = -2:*

$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow A\vec{u}=-2\vec{u}$, επομένως $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y=0\\ 2x+y=0\end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής (χ, -2χ).

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα της λ = -2 είναι της μορφής $\vec{u}=\begin{pmatrix}\kappa\\ -2\kappa\end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(-2)=\{(\kappa,-2\kappa),\kappa\in\mathbb{R}\}$.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = 3:*

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = 3\vec{u}$, επομένως $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής (2y, y).

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα της λ = 3 είναι της μορφής $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2\kappa \\ \kappa \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(3) = \{(2\kappa, \kappa), \kappa \in \mathbb{R}\}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Τότε, $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$.

Έτσι, det($A-\lambda I$)=0 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ....(\lambda-3)(\lambda-2)^2 = 0$.

Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι οι λ = 3 και λ = 2 (διπλή ρίζα)

Λέμε ότι η ιδιοτιμή λ = 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. [**m (2) =2].**

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = 3:*

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = 3\vec{u}$, επομένως $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -2y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής $\begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa \\ -2\kappa \end{pmatrix}$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα της λ = 3 είναι το $\vec{u} = \begin{pmatrix} \kappa \\ \kappa \\ -2\kappa \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(3) = \{(\kappa, \kappa, -2\kappa), \kappa \in \mathbb{R}\}$.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ =2:*

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = 2\vec{u}$, επομένως $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ -y-z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα της λ = 2 είναι το $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(2) = \{(\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 2**</u> Τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Ειδικά για συμμετρικούς πίνακες, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

<u>ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>

• Διαγώνιοι πίνακες: $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο,

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• Τριγωνικοί (άνω ή κάτω) πίνακες: $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται και πάλι στην κύρια διαγώνιο, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1$.

Εάν το 0 είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα, τότε αυτός δεν αντιστρέφεται και αντιστρόφως

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΙΝΑΚΑ:

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F . Για χ στο F, ορίζεται το πολυώνυμο (ως προς χ) : $h_A(x) = \det(A - xI_n)$.

Πόρισμα 1: Ο βαθμός του χαρ/κου πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα A είναι *η*.

Πόρισμα 2: Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας έχει το πολύ η ιδιοτιμές.

•Αλγεβρική πολλαπλότητα **m (λ)** μιας ιδιοτιμής λ ονομάζουμε την πολλαπλότητα της θεωρούμενη ως ρίζα του χαρ/κου πολυωνύμου.

• Γεωμετρική πολλαπλότητα **d (λ)** μιας ιδιοτιμής λ ονομάζουμε την διάσταση του ιδιόχωρου V(λ) .

• Η ιδιοτιμή λ θα λέγεται **ισορροπημένη** αν **m (λ) = d (λ).**

• Ένας πίνακας A καλείτα**ι απλής δομής** αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι ισορροπημένες.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u> (Πίνακας απλής δομής)

Έστω A= $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Δηλαδή η ιδιοτιμή 1 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. [**m (1) =2]** και η ιδιοτιμή 5 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1. [**m (5) =1]**

Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

• Στην ιδιοτιμή λ = 5, αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $u_1 = (k, k, k)$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση 1. Άρα **d (5) =1.** Η ιδιοτιμή 5 είναι **ισορροπημένη.**

Μία βάση του χώρου αυτού είναι το διάνυσμα X_1 = (1,1,1).

• Στην ιδιοτιμή λ = 1, αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $u_2 = (\kappa, \lambda, -\kappa - 2\lambda)$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση 2. Άρα **d (1) =2.** Η ιδιοτιμή 1 είναι **ισορροπημένη.**

Μία βάση του χώρου αυτού είναι τα διανύσματα X_2 = (1,0,-1) και X_3 = (2,-1,0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Δύο όμοιοι τετραγωνικοί πίνακες A και B (δηλ. $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, με P αντιστρέψιμο) έχουν ίδιο χαρ/κο πολυώνυμο, και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές.
Επίσης, αν X, Y τα ιδιοδιανύσματα των A, B αντίστοιχα, που προκύπτουν από την ίδια ιδιοτιμή, τότε $X = PY$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Θα κάνουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 3 :

Στο παράδειγμα 2 είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές λ = 3 και λ = 2 (διπλή) με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα X_3 = (κ, κ, -2κ) και X_2 = (λ, 0, 0).

Παίρνουμε τον πίνακα $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, όπου P= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

O B υπολογίζεται με πράξεις: B= $\begin{bmatrix} 4.5 & -0.5 & -4.5 \\ -1.25 & 1.75 & 2.75 \\ 0.75 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του B είναι 3, 2 και 2 όπως και του A.

Τα ιδιοδιανύσματα του B είναι Y_3 = (-0.92, 0.19,-0.32) και Y_2 =(-0.81, -0.4, -0.4).
Βλέπουμε ότι P * Y_3 = (-0.5, -0.5, 1) = X_3
και P * Y_2 = (-1.6, 0, 0) =X_2 .

ΘΕΩΡΗΜΑ CAYLEY- HAMILTON

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x)=\sum_{i=0}^{v} a_k x^k = a_v x^v + a_{v-1}x^{v-1}+...+a_1 x + a_0$.

Έστω επίσης ένας $n\times n$ πίνακας A επί ενός σώματος F

Ο πίνακας $p(A)=a_v A^v + a_{v-1}A^{v-1}+...+a_1 A + a_0 I$ λέγεται **τιμή του πολυωνύμου p(x)** στον πίνακα A.

> **<u>Θεώρημα Cayley –Hamilton</u>**
> Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Οι εφαρμογές αυτού του θεωρήματος είναι πολλές, οι κυριότερες είναι :

• Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} (αν υπάρχει) συναρτήσει του αρχικού πίνακα A

• Υπολογίζουμε μεγάλες δυνάμεις του A, καθώς και πολυώνυμα του A μεγάλου βαθμού.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα.

Το χαρ/κο του πολυώνυμο είναι $(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$,

επομένως από το Θεώρημα Cayley –Hamilton ισχύει $A^3-7A^2+16A-12I=0$.

• Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{-1} συναρτήσει του αρχικού πίνακα A :

Λύνουμε ως προς I, και παραγοντοποιούμε: $I=\frac{1}{12}\left(A^2-7A+16I\right)A$, επομένως

αφού $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ έχουμε ότι $A^{-1}=\frac{1}{12}A^2-\frac{7}{12}A+\frac{4}{3}I$.

Πράγματι, αν κάνουμε τις πράξεις έχουμε ότι

$$\frac{1}{12}A^2 - \frac{7}{12}A + \frac{4}{3}I = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.333 & -0.083 \\ 0 & 0.666 & 0.166 \\ 0 & -0.333 & 0.166 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Υπενθύμιση: Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$(εάν υπάρχει) είναι ο :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

Ορισμός

Έστω Α ένας $n\times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ο Α λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος προς έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \Delta, \text{ με } \Delta \text{ διαγώνιο.}$$

Θεώρημα: Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν η το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Α .

Σημείωση: Ο διαγώνιος πίνακας Δ έχει στην διαγώνιο τις ιδιοτιμές του Α.
Ο πίνακας P έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του Α .

Πόρισμα: Αν ένας $n\times n$ πίνακας έχει η διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε διαγωνοποιείται.

• Ένας πίνακας μη απλής δομής δεν διαγωνοποιείται.
Εάν ένας πίνακας διαγωνοποιείται και λ μια ιδιοτιμή του, τότε **m (λ) = d (λ)**
(δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του είναι ισορροπημένες, ή ισοδύναμα είναι απλής δομής)

• Εάν ένας πίνακας Α διαγωνοποιείται, τότε ισχύουν:

$$A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1} \quad \text{και} \quad A^k = P\Delta^k P^{-1},\ k\in\mathbb{Z}$$

• Οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται πάντα.

• Το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του πίνακα.

• Το γινόμενο των ιδιοτιμών ισούται με την ορίζουσα του πίνακα.

Γενικά, μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Η διαγωνιοποιησιμότητα συνδέεται με τα ιδιοδιανύσματα. Η αντιστρεψιμότητα συνδέεται με τις ιδιοτιμές.

Παραδείγματα διαγωνοποίησης:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \lambda=0(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}),\quad \lambda=3, P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε ότι Δ = $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ- ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

<u>Ορισμός</u>

Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο p(x) λέγεται **ελάχιστο πολυώνυμο** του Α αν ισχύουν τα παρακάτω:

1) p(A) = 0

2) Έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα

3) Κάθε άλλο πολυώνυμο q(x) με q(A)= 0 έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με του p(x).

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μοναδικό για κάθε πίνακα.

Από τον ορισμό αυτόν αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις:

- Ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του χαρ/κου του πολυωνύμου.
- Το χαρ/κο πολυώνυμο ενός πίνακα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο του.
- Το χαρ/κο πολυώνυμο ενός πίνακα και το ελάχιστο πολυώνυμο του έχουν τις ίδιες ρίζες, αλλά με πολλαπλότητα πιθανώς διαφορετική. Συνεπώς, το p(x) περιέχει όλους τους γραμμικούς παράγοντες του $h_A(x)$.
- Εάν το χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x)$ ενός $n \times n$ πίνακα Α έχει η διακεκριμένες ρίζες, τότε $h_A(x) = (-1)^n p(x)$, όπου p(x) το ελάχιστο πολυώνυμο του.
- Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα είναι πολύ χρήσιμο στην διαδικασία διαγωνοποίησης ενός πίνακα.

<u>Θεώρημα:</u> Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν η το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A .

3) Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι γινόμενο διακεκριμένων παραγόντων.,

δηλαδή της μορφής : $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_k)$

<u>Παραδείγματα διαγωνοποίησης:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}), \quad \lambda = 3, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε ότι Δ = $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το p(x)= x(x-3).

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 :</u>

Δίνεται ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί πίνακας M τέτοιος ώστε $M^2 = A$.

<u>Λύση:</u>

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές 0, 1 και 4. Επομένως διαγωνοποιείται.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι : (-1, 1, 0), (0, -1, 1) και (1 ,2 ,-2).

Έτσι, A= $P\Delta P^{-1}$, δηλαδή A= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = P\Delta' P^{-1}\, P\Delta' P^{-1}$, με Δ' = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Έτσι, A= M^2, με M= $P\Delta' P^{-1}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Η ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ QR

Κάθε $m \times n$ πίνακας A με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε A = QR, με Q $m \times n$ ορθογώνιο πίνακα και R $n \times n$ άνω τριγωνικό και αντιστρέψιμο.
(Αυτή η παραγοντοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη τετραγωνικούς πίνακες.)
Ο πίνακας Q υπολογίζεται μέσω της μεθόδου Gram- Schmidt, εφαρμόζοντας την στις στήλες του πίνακα A. Στη συνέχεια, τα διανύσματα που προκύπτουν είναι οι στήλες του Q.
Για να βρούμε τα στοιχεία r_{ij} του πίνακα R χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της διαδικασίας Gram- Schmidt, δηλαδή:
Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα R είναι οι νόρμες των διανυσμάτων u_i με τις οποίες διαιρέσαμε στο τέλος της διαδικασίας.

Τα υπόλοιπα στοιχεία r_{ij} είναι ίσα με: $r_{ij} = \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:</u> Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Θα βρούμε την QR παραγοντοποίηση του A.

Έστω $v_1 = (1,2), v_2 = (3,4)$. Θα κάνουμε ορθοκανονικοποίηση Gram- Schmidt:

Έχουμε $\|v_1\| = \sqrt{5}$.Θέτουμε $u_1 = v_1 = (1,2)$.

Τότε, $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (3,4) - \frac{11}{5}(1,2) = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$.

Άρα, $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ και $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$ αφού $\|u_2\| = \frac{\sqrt{20}}{5}$.

Επομένως ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Τώρα θα βρούμε τον πίνακα R.

Αυτός είναι άνω τριγωνικός και τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι αριθμοί $\sqrt{5}, \frac{\sqrt{20}}{5}$.

Όσο για το στοιχείο r_{12}, θα είναι $r_{12} = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|} = \frac{11}{\sqrt{5}}$.

Άρα, $R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5} \end{bmatrix}$ και ισχύει A = QR.

Εναλλακτικά, ο πίνακας R υπολογίζεται (ευκολότερα) ως εξής:

$A = QR \Rightarrow Q^T A = Q^T QR = R \Rightarrow$

$R = Q^T A$

<u>Εφαρμογή στην επίλυση συστημάτων:</u>

Χρησιμοποιόντας την παραπάνω παραγοντοποίηση λύνουμε εύκολα μεγάλα γραμμικά συστήματα:

$AX = B \Rightarrow QRX = B \Rightarrow RX = Q^T B$

Και αφού ο R είναι άνω τριγωνικός, το σύστημα επιλύεται εύκολα ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή και αντικαθιστώντας προς τα πίσω.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να λυθεί το σύστημα: $AX = B, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, ο πίνακας A παραγοντοποιείται σε A = QR οπότε η AX = B γίνεται

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Αρα $\begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$, που σημαίνει ότι

$\frac{\sqrt{20}}{5} y = \frac{4}{\sqrt{5}}$ αρα y = 2, και με αντικατάσταση x = 1.

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

Εστω ενας τετραγωνικος πίνακας Α

1) det(A) $\neq$0 αν κα μονο εάν ο Α αντιστρέφεται
2) det(A) = det(A^T)
3) det(I) = 1 οπου I ο μοναδιαίος.
4) det(A^{-1})= $\dfrac{1}{\det(A)}$
5) det(AB) = det(A) det(B)
6) det(A^κ) = (det(A) $)^\kappa$
7) Εάν μια γραμμη (στηλη) του πίνακα πολλαπλασιαστεί με κ τότε η ορίζουσα του νεου πίνακα είναι κdet(A)
8) Εάν ο πίνακας είναι διαγώνιος ή τριγωνικός, η ορίζουσα είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.
9) Εάν μια γραμμη (στηλη) του πίνακα είναι μηδενική τοτε det(A) = 0
10) Εάν οι γραμμες (στηλες) είναι γραμμικα εξαρτημένες τοτε det(A) = 0.

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Οι πίνακες Α κ Β είναι όμοιοι εάν αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{A = P\,B\,P^{-1}}$$

Ιδιότητες:

1) Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές (με ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα)
   Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή εαν δυο πίνακες έχουν ιδιες ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα όμοιοι.
2) Det(A)= Det(B)
3) Οι πίνακες A^T, B^T είναι όμοιοι.
4) Trace(A) = trace(B) (αφού tr(AB) = tr(BA))
5) Εαν $A^2 = A$ και A, B όμοιοι ,τότε $B^2 = B$
6) OI όμοιοι πίνακες έχουν ίδια κανοική μορφή Jordan
7) Εαν A, B όμοιοι, το ίδιο ισχύει και για τους A^κ, B^κ , $\kappa \in \mathbb{N}$

Το πηλίκο του Rayleigh (Συνέχεια)

<u>Παράδειγμα 1</u>: Εστω ο πινακας A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ Με ιδιοτιμές λ = 1, 3 και 6.

Να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = x^T A\, x$, με $x^T x = 1$.

Ξέρουμε οτι αυτο συμβαίνει για το ιδιοδιάνυσμα τηε μεγαλύτερης ιδιοτιμής, και οτι τι μέγιστο της συνάρτησης ισούται με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή, αρα $f_{max} = 6$.

Το διάνυσμα χ πού δίνει μέγιστο είναι το $x=(1, 1, 1)^T$, κανονικοποιώντας το διαιρούμε τις συνιστώσες του με την νόρμα του και παίρνουμε $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

<u>Θεώρημα:</u> Εστω η $f(x) = x^T A\, x$, με $x^T x = 1$, όπου Α συμμετρικός πίνακας θετικά ορισμένος.

Τότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης υπο τον περιορισμό $x^T u = 0$, όπου u το ιδιοδιάνυσμα της μεγαλύτερης ιδοτιμής, είναι ίση με την επόμενη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Το διάνυσμα χ πού δίνει μέγιστο είναι το ιδιοδιάνυσμα αυτης της ιδιοτιμής

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το μέγιστο της τετραγωνικής μορφής $9x^2 + 4y^2 + 3z^2$ στη μοναδιαία σφαίρα υπο τον περιορισμό $x^T (1, 0 , 0) = 0$.

Το διάνυσμα (1, 0 , 0) είναι το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ = 9, οποτε απο το παραπάνω θεώρημα το μέγιστο είναι ίσο με 4 και δίνεται απο το διάνυσμα (0, 1 , 0) που αντιστοιχεί σε αυτήν.

Πράγματι, $9x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 4y^2 + 3z^2$ (γιατι απο τον περιορισμό παίρνουμε χ = 0) και $4y^2 + 3z^2 \leq 4y^2 + 4z^2 = 4$

Θεώρημα: Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας. Τότε οι A, A^{-1} έχουν τα ιδια ιδιοδιανύσματα και για τις ιδιοτιμές λ ισχύει $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$

Θεώρημα Schur: Έστω A ένας $n\times n$ πίνακας. Τότε αυτός τριγωνοποιείται πάντα στο $\mathbb{C}$, ενώ στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιος με καποιον ανω τριγωνικό πίνακα εάν οι ιδιοτιμες του είναι όλες πραγματικές. Ο πινακας μεταβασης είναι ορθομοναδιάιος (αντίστοιχα ορθογώνιος)

Φασματικό Θεώρημα: Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται με τον πίνακα μετάβασης U να είναι ορθογώνιος.

$$A = UDU^T, \quad D = diagonal$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα K. (συνήθως το $\mathbb{R}$) Μια απεικόνιση $f: V \to K$ λέγεται **γραμμική μορφή** επί του V αν για κάθε $x, y \in V,\ \lambda, \mu \in K$ ισχύει:

$$f(\lambda\chi + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

(Τα απλούστερα παραδείγματα γραμμικής απεικόνισης είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής και ο τελεστής παραγώγισης).

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα K (συνήθως το $\mathbb{R}$). Μια απεικόνιση $\Phi: V\times V \to \mathbb{R}$ λέγεται **διγραμμική μορφή** επί του $\mathbb{R}$ αν για κάθε $x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} &i)\Phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\Phi(x,z) + \mu\Phi(y,z) \\ &ii)\Phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\Phi(x,y) + \mu\Phi(x,z) \end{aligned}$$

<u>*Παράδειγμα 1*</u> Αν $V = \mathbb{R}^2$, διγραμμική μορφή είναι η απεικόνιση:

$$\Phi(x,y) = x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 5x_2y_2$$

Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Αποδεικνύεται ότι αν $\Phi(x,y)$ είναι μια διγραμμική μορφή, τότε αυτή μπορεί να γραφτεί και με την μορφή : $\Phi(x,y)=X^T AY$, όπου A ο πίνακας της διγραμμικής μορφής και X, Y οι πίνακες στήλες των διανυσμάτων x, y ως προς την βάση του V.
Μια διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική** αν ισχύει $\Phi(x,y)=\Phi(y,x) \quad \forall x,y\in V$.
Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Ένα παράδειγμα συμμετρικής διγραμμικής μορφής στον χώρο των πολυωνύμων μέχρι $2^{ου}$ βαθμού είναι το ακόλουθο:

Ορίζουμε $\Phi:\mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}, \quad \Phi(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες του ορισμού, καθώς και ότι $\Phi(p,q)=\Phi(q,p)$

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και Φ μια συμμετρική διγραμμική μορφή.

Η απεικόνιση $F:V\to\mathbb{R} \quad :F(X)=\Phi(x,x)=\mathrm{X^T AX}$ λέγεται **τετραγωνική μορφή** αντίστοιχη της Φ.

<u>Παράδειγμα 2</u> Αν $V=\mathbb{R}^2$, τετραγωνική μορφή είναι η απεικόνιση:

$f(x)=2x^2+y^2-6xy$, με αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα A= $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι, $f(x)=X^T AX = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2+y^2-6xy$

<u>Παράδειγμα 3</u> Αν $V=\mathbb{R}^3$, τετραγωνική μορφή είναι η απεικόνιση:

$$Q(x)=x^2-3y^2+z^2-4xy+2yz+6xz, \quad ή \quad Q(x)=[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι κάθε συμμετρικός $n\times n$ πίνακας ορίζει μια τετραγωνική μορφή $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με $F(x)=X^T AX$.

Επειδή όλοι οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται και μάλιστα από έναν ορθογώνιο πίνακα Q, ισχύει $A = Q\Delta Q^T$, θέτοντας $X = QY$ έχουμε :

$$F(x) = (QY)^T A(QY) = Y^T QAQ^T Y = Y^T \Delta Y$$

που ισούται με $\lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A.

Η παραπάνω έκφραση της F(x) λέγεται **κανονική μορφή** της F(x).

<u>*Παράδειγμα 3*</u> Έστω $V = \mathbb{R}^3$, και η τετραγωνική μορφή F : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

F(x) $= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$. (Θεωρούμε X = (x_1, x_2, x_3))

Θα υπολογίσουμε την κανονική μορφή της και τον πίνακα μετασχηματισμού Q που την ανάγει στην κανονική της μορφή.

Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι ο A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι λ = 1, λ = 3 και λ = 4.

Επομένως, η κανονική μορφή που προκύπτει είναι η

F(x) $= y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2$, όπου Y = (y_1, y_2, y_3).

Ο ορθογώνιος πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων (κανονικοποιημένα και σε στήλες) είναι:

$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, και ο μετασχηματισμός που κάνει την αναγωγή στην κανονική μορφή ο X= QY.

<u>Παράδειγμα 4</u> Έστω $V=\mathbb{R}^3$, και η τετραγωνική μορφή F : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{F(x)} = 6x_1^{\ 2} + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 .$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι ο A= $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι λ = 3, λ = 6 και λ = 9.

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα X_1 = (2, 2, -1), X_2 = (-1, 2,2) και X_3 = (2, -1, 2).

Αφού τα ιδιοδιανύσματα κανονικοποιηθούν, βρίσκουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός αναγωγής ο X= QY.

Επομένως, η κανονική μορφή που προκύπτει είναι η

$$\mathrm{F(x)} = 3y_1^{\ 2} + 6y_2^{\ 2} + 9y_3^2 .$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ -ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Καμπύλες 2^{ου} βαθμου στο επίπεδο

Παράδειγμα 5 Έστω η τετραγωνική μορφή $f(x) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$.

Αφού την φέρουμε σε κανονική μορφή, θα εξετάσουμε γεωμετρικά την συνθήκη $f(x) = 8$.

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο Α = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές λ =2 και λ = 4.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (κανονικοποιημένα) είναι τα $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ και

$v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Έτσι ο ορθογώνιος πίνακας μετασχηματισμού είναι ο

$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}$. Θέτουμε $X = QY$, και η τετραγωνική μορφή

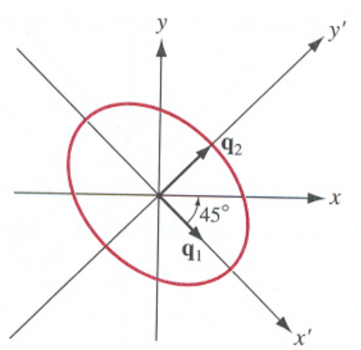
γίνεται: $f(x) = Y^T \Delta Y = 2y_1^2 + 4y_2^2$.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x) = 2y_1^2 + 4y_2^2 = 8$, η οποία μετασχηματίζεται στην

$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1$ που είναι μια έλλειψη.

Όπως έχουμε αναφέρει, αφού η ορίζουσα του πίνακα Q είναι ίση με 1, ο πίνακας παριστάνει στροφή κατά 45^o δεξιόστροφα από τον άξονα χχ'(με την φορά του ρολογιού).

Αυτό το βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα:



Η γενικη μορφη των τετραγωνικών μορφών:

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμες λ_1 λ_2 του αντίστοιχου πίνακα, τον διαγωνοποιούμε, θετουμε $X = QY$ ως συνήθως, οποτε $\begin{bmatrix} d_1 & e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} Q$

και παίρνουμε την διακρίνουσα:

$$\Delta = \frac{d_1^{\,2}}{4\lambda_1} + \frac{e_1^{\,2}}{4\lambda_2} - k$$

Εάν:

$\Delta \neq 0$ τότε η καμπύλη είναι έλλειψη η υπερβολή.

$\Delta = 0$ τοτε είναι ζεύγος ευθειών η σημείο, η αρχή των αξόνων.

Μια ιδιοτιμη είναι 0,είναι παραβολή.

Και οι 2 ιδιοτιμές 0, είναι ευθεία.

ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και F μια τετραγωνική μορφή, $F: V \to \mathbb{R}$ Αυτή λέγεται:

1. Θετικά ορισμένη (αντίστοιχα **αρνητικά ορισμένη**) αν $F(x) > 0$ $(F(x) < 0)$ για κάθε $x \in V, \mu\varepsilon\ x \neq 0$.

2. Θετικά ημιορισμένη αν $F(x) \geq 0$ και υπάρχουν διανύσματα $x \in V, \mu\varepsilon\ x \neq 0$ τέτοια ώστε F(x) = 0.

3. Αόριστη αν μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές.

4. Εκφυλισμένη αν υπάρχει κάποιο $x \in V, \mu\varepsilon\ x \neq 0$ τέτοιο ώστε F(x) = 0.

Προφανώς από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή είναι εκφυλισμένη.

Θεώρημα 1: Μια τετραγωνική μορφή $F: V \to \mathbb{R}$ είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της (του αντίστοιχου πίνακα) είναι θετικές (αντίστοιχα αρνητικές).

Προφανώς από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι θετικά και οι αρνητικά ορισμένοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, γιατί το 0 δεν είναι ιδιοτιμή τους.

Ένα ισοδύναμο θεώρημα είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 2: Έστω ότι μια τετραγωνική μορφή $F:V\to\mathbb{R}$ έχει πίνακα A ως προς κάποια βάση. Τότε, θα είναι $F(x)=x^T Ax$. Θεωρούμε τις ορίζουσες :

$$A_1=a_{11},\qquad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad A_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\ \text{κλπ.}$$

Τότε:

1. Η F θα είναι **θετικά ορισμένη** αν και μόνο αν $A_1>0,\ A_2>0,\quad A_3>0...$

2. Η F θα είναι **αρνητικά ορισμένη** αν και μόνο αν

$$A_1<0,\ A_2>0,\quad A_3<0...\quad (-1)^n A_n>0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα δεν αρκεί για να αποφανθούμε αν ενας πίνακας είναι θετικά η αρνητικά ορισμένος, ή αόριστος.

Παράδειγμα, ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 10 & 3\end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος αλλά έχει ορίζουσα ίση με 4.

Ορισμός: Έστω ότι από το πλήθος των n μη μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα A, οι p είναι θετικές και οι q (με q = n – p) αρνητικές. Τότε, ο αριθμός s = p – q λέγεται **dείκτης** ή **υπογραφή** της F. **sig(f) = p – q**

Παράδειγμα: Έστω ένας πίνακας A με χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x)=(x-6)(x-2)(x+1)(x-4)$. Τότε, οι ιδιοτιμές του είναι 6, 2, -1 και 4. Επομένως, S = 3 – 1 = 2.

<u>Θεώρημα Sylvester (Αδράνειας)</u>

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και F μια τετραγωνική μορφή, $F:V\to\mathbb{R}$. Τοτε υπάρχει μια βάση του χώρου που την αναπαριστά με διαγώνιο πίνακα, και μάλιστα θα έχει τον ιδιο αριθμό θετικών καταχωρήσεων p και τον ίδιο αριθμό αρνητικών q με την αρχική.

Ισχύει: **sig(f) = p – q, rank(f) = p+q**

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Έστω $f(x)$ μια τετραγωνική μορφή και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου συμμετρικού πίνακα Α.

Τότε, η μέγιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα (δηλαδή για τα διανύσματα με νόρμα ίση με 1, $\|x\| = 1$) είναι ίση με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η μέγιστη τιμή αυτή επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

Αντίστοιχα, η ελάχιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα είναι ίση με την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η ελάχιστη τιμή αυτή επίσης επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

<u>*Παράδειγμα 9*</u> Έστω η τετραγωνική μορφή $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 2xy + 2xz$.

Ο αντίστοιχος πίνακας της είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τα διανύσματα της μοναδιαίας σφαίρας, είναι αυτά που ικανοποιούν την συνθήκη : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Θα βρούμε τα ακρότατα πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

Ο πίνακας αυτός έχει για ιδιοτιμές τις: $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 0$.

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, είναι τα $x_1 = (\sqrt{2}, 1, 1),\ x_2 = (-\sqrt{2}, 1, 1),\ x_3 = (0, -1, 1)$.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, η μέγιστη τιμή της παράστασης $2xy + 2xz$ είναι $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Η ελάχιστη τιμή της είναι - $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα τα κανονικοποιήσαμε, για να έχουν νόρμα ίση με 1.

<u>*Σημείωση:*</u> Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν σε σφαίρα οποιαδήποτε ακτίνας α, και τότε το μέγιστο (ή ελάχιστο) είναι ίσο με $\lambda_{\max}.a$ ($\lambda_{\min}.a$). (Με α >0)

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που μας δίνουν τα σημεία, θα έχουν μήκος $\|x\| = a$.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας στην μελέτη των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών είναι μέσω των τετραγωνικών μορφών.
Με την βοήθεια των τετραγωνικών μορφών μπορούμε να πάρουμε ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τοπικών ακροτάτων, και να χαρακτηρίσουμε το είδος τους.
Για να γίνει αυτό, πρέπει να βρούμε τον πίνακα της $2^{ης}$ παραγώγου στα κρίσιμα (στάσιμα) σημεία της συνάρτησης, και να βρούμε αν αυτός είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, ή αόριστος.
Πιο συγκεκριμένα : Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη στο στάσιμο σημείο ξ. Τότε:

- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι θετικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο ξ.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αρνητικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αόριστος, και ισχύει $\det(f''(\xi)) \neq 0$, τότε το σημείο ξ είναι σημείο σέλας.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αόριστος, και ισχύει $\det(f''(\xi)) = 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την συμπεριφορά της f στο σημείο ξ.

Στην περίπτωση που η f είναι μια τετραγωνική μορφή, το σημείο (0,0) (ή το (0, 0, 0)) είναι πάντα στάσιμο σημείο της. Όταν μάλιστα ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι αντιστρέψιμος, είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο.
Έτσι, το σημείο αυτό θα είναι πάντα είτε ολικό μέγιστο, είτε ολικό ελάχιστο, είτε σημείο σέλας.
Ένα απλό τέτοιο παράδειγμα θα δούμε παρακάτω:

<u>Παράδειγμα 5</u> Έστω η τετραγωνική μορφή $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y)=2x^2-4xy+5y^2$.

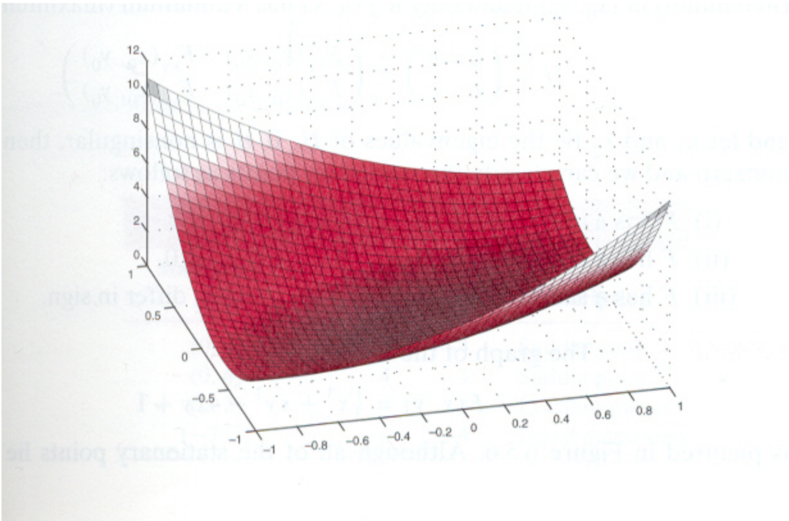
Ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι :

$f_x = 4x-4y,\ f_y=-4x+10y$.

Μηδενίζοντας τις, παίρνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4x-4y=0 \\ -4x+10y=0 \end{cases}$, το οποίο έχει μοναδική λύση το σημείο Ο(0,0). Αυτό είναι και το μοναδικό στάσιμο σημείο.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Βλέπουμε πως δεν μπορούμε από το σχήμα να αποφανθούμε αν το σημείο Ο(0,0) είναι ολικό ελάχιστο ή σημείο σέλας.

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα Α, και είναι λ = 6 και λ = 1.

Επομένως ο Α είναι θετικά ορισμένος, άρα το (0,0) είναι ολικό ελάχιστο.

Φυσικά μπορούσαμε να βρούμε ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και βάσει του θεωρήματος 2, υπολογίζοντας τις ορίζουσες A_1 και A_2 που είναι θετικές.

Γενικότερα, στην περίπτωση των συναρτήσεων 2 μεταβλητών, κάνουμε τα εξής:

1) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

2) Βρίσκουμε τα σημεία που μηδενίζονται οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$, έστω (x_0, y_0).

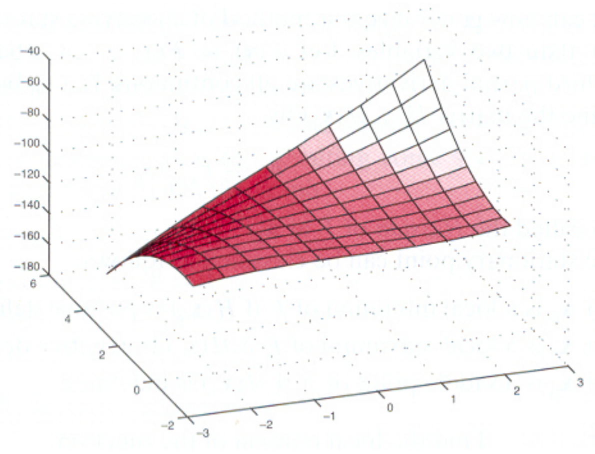
3) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα 2$^{\eta}$ς παραγώγου:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \text{ στα σημεία } (x_0, y_0).$$

4) Βρίσκουμε αν ο πίνακας A είναι θετικά, αρνητικά ορισμένος ή αόριστος και έτσι βγάζουμε το συμπέρασμα για τα στάσιμα σημεία.

Παράδειγμα 6 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 - 4xy + 1$.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι μερικές παράγωγοι είναι : $f_x = x^2 + y^2 - 4y, \quad f_y = 2xy - 4x$.

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα, και παίρνουμε χ = 0 , y = 0 ή 4 και

$y = 2, x = \pm 2$.

Έτσι τα στάσιμα σημεία είναι τα O(0,0), A(0,4), B(2,2) και Γ(-2, 2).

Για να ταξινομήσουμε τα στάσιμα σημεία, βρίσκουμε τον πίνακα της $2^{ης}$ παραγώγου:

$$A = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 - 4 \\ 2y_0 - 4 & 2x_0 \end{bmatrix}$$

Για καθένα από τα σημεία (x_0, y_0) έχουμε λοιπόν:

Στάσιμο σημείο	λ_1	λ_λ	**Περιγραφή**
O(0,0)	4	-4	Σημείο σέλας
A(0,4)	4	-4	Σημείο σέλας
B(2,2)	4	4	Ολικό ελάχιστο
Γ(-2, 2)	-4	-4	Ολικό μέγιστο

<u>*Παράδειγμα 7*</u> Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + xz - 3\cos y + z^2$.

Η συνάρτηση είναι C^2 τάξης στο $\mathbb{R}^3$ και οι πρώτες μερικές παράγωγοι της είναι οι $f_x = 2x + z,\quad f_y = 3\sin y,\ f_z = x + 2z$

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα, και παίρνουμε $x = z = 0$ κα ι $y = n\pi$, με $n \in \mathbb{Z}$. (Παίρνουμε ξεχωριστές περιπτώσεις για $n = 2k,\quad n = 2k+1$).

Υπολογίζουμε τον πίνακα $2^{ης}$ παραγώγου που είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3\cos y & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

• Στην $1^η$ περίπτωση , έστω $x_0 = (0, 2k\pi, 0)^T$.

Τότε, ο πίνακας Α στο σημείο x_0 είναι : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι λ = 3 (διπλή) και λ = 1, επομένως είναι θετικά ορισμένος. Έτσι, στα σημεία $x_0 = (0, 2k\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι ίσο με $f(0, 2k\pi, 0) = -3$.

• Στην $2^η$ περίπτωση , έστω $x_0 = (0, 2(k+1)\pi, 0)^T$.

Τότε, ο πίνακας Α στο σημείο x_0 είναι : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι λ = 3 , λ = -3 και λ = 1, επομένως είναι αόριστος..

Έτσι, στα σημεία $x_0 = (0, 2(k+1)\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο σέλας.

<u>*Παράδειγμα 8*</u> Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Η συνάρτηση είναι C^2 τάξης στο $\mathbb{R}^3$ και οι πρώτες μερικές παράγωγοι της είναι οι $f_x = 4x^3 - 4(x-y),\quad f_y = 4y^3 + 4(x-y)$.

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y = x - x^3 \end{cases}$$

Από αυτό προκύπτουν τα στάσιμα σημεία: $(x, y) = (0,0)$ ή $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ή $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Υπολογίζουμε τον πίνακα $2^{ης}$ παραγώγου, που είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$$

• Για το σημείο Α $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσες $A_1 = 20$, $A_2 = 384$ άρα είναι θετικά ορισμένος.

Επομένως στο σημείο Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι ίσο με $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ = -8.

• Για το σημείο Β $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσες $A_1 = 20$, $A_2 = 384$ άρα είναι θετικά ορισμένος.

Επομένως στο σημείο Β παρουσιάζει επίσης τοπικό ελάχιστο ίσο με $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ = -8

• Για το σημείο Ο(0,0) αντικαθιστούμε και έχουμε : $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Οι ορίζουσα του Α είναι μηδέν, επομένως με την μέθοδο αυτή δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το σημείο Ο είναι τοπικό ακρότατο ή όχι.

Τελικά με άλλη μέθοδο που ξεφεύγει από το μάθημα αποδεικνύεται ότι το σημείο αυτό είναι σημείο σέλας.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Έστω $f(x)$ μια τετραγωνική μορφή και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου συμμετρικού πίνακα Α.

Τότε, η μέγιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα (δηλαδή για τα διανύσματα με νόρμα ίση με 1, $\|x\| = 1$) είναι ίση με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η μέγιστη τιμή αυτή επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

Αντίστοιχα, η ελάχιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα είναι ίση με την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η ελάχιστη τιμή αυτή επίσης επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

<u>*Παράδειγμα 9*</u> Έστω η τετραγωνική μορφή $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 2xy + 2xz$.

Ο αντίστοιχος πίνακας της είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τα διανύσματα της μοναδιαίας σφαίρας, είναι αυτά που ικανοποιούν την συνθήκη : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Θα βρούμε τα ακρότατα πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

Ο πίνακας αυτός έχει για ιδιοτιμές τις: $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 0$.

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, είναι τα $x_1 = (\sqrt{2}, 1, 1),\ x_2 = (-\sqrt{2}, 1, 1),\ x_3 = (0, -1, 1)$.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, η μέγιστη τιμή της παράστασης $2xy + 2xz$ είναι $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Η ελάχιστη τιμή της είναι - $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα τα κανονικοποιήσαμε, για να έχουν νόρμα ίση με 1.

<u>*Σημείωση:*</u> Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν σε σφαίρα οποιαδήποτε ακτίνας α, και τότε το μέγιστο (ή ελάχιστο) είναι ίσο με $\lambda_{\max}.a$ ($\lambda_{\min}.a$). (Με α >0)

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που μας δίνουν τα σημεία, θα έχουν μήκος $\|x\| = a$.

Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN

Εάν ένας πίνακας δεν διαγωνοποιείται, τότε ο στόχος μας είναι υπολογίσουμε μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, έναν απλούστερο πίνακα, «σχεδόν διαγώνιο» όπως ο παρακάτω πίνακας. Αυτός θα έχει τις ιδιοτιμές του στην διαγώνιο, στην δευτερεύουσα διαγώνιο τα στοιχεία θα είναι 0 ή 1, και τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

$$[T]_\beta = J = \left[\begin{array}{ccc|c|cc|c|c|cc}
5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται κανονική μορφή Jordan και είναι μοναδική για κάθε πίνακα. Τα διαγώνια block που εμφανίζονται (ένα για κάθε ιδιοτιμή) λέγονται Jordan blocks. Το κάθε block έχει εσωτερικά block, όσα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.

> Ο πίνακας Α θα είναι όμοιος με μια κανονική μορφή Jordan J αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $J = P^{-1}AP$

Θεώρημα: Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}...(x-\lambda_r)^{n_r}$, $p_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}...(x-\lambda_r)^{m_r}$

αντίστοιχα, όπου λ_ι οι ιδιοτιμές . (Υποθέτουμε πως έχει η πραγματικές ιδιοτιμές)
Τότε για την κανονική μορφή Jordan έχουμε:

<u>Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:</u>

Α) Ο πίνακας Jordan αποτελείται από r το πλήθος Jordan blocks.

Β) Κάθε Jordan block είναι τύπου $n_i \times n_i$

<u>Από το ελάχιστο πολυώνυμο:</u>

Γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένας υποπίνακας J_{ij} τάξης m_i. Οι άλλοι έχουν τάξη $\leq m_i$.

Δ) Ο αριθμός των J_{ij} ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:</u> Να βρεθούν οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan ενός 10×10 πίνακα A με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο αντίστοιχα:

$$h_A(x) = (x-3)^5 (x-2)^3 x^2, \quad p_A(x) = (x-3)^3 (x-2)^3 x^2 .$$

Οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan είναι:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε ποια από τις 2 περιπτώσεις αντιστοιχεί στον πίνακα A, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα P (την βάση Jordan). Σε περιπτώσεις μεγάλων πινάκων όπως τώρα, αυτό είναι πολύ χρονοβόρο. Όταν έχουμε πίνακες 3×3, *ή* 4×4, θα υπολογίζουμε και τον πίνακα P.

Για να υπολογιστεί ο P, πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα των ιδιοτιμών, και μετά να υπολογίσουμε αυτά που «λείπουν», τα **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**. Όλα μαζί τα διανύσματα αυτά αποτελούν την βάση Jordan και είναι οι στήλες του πίνακα P.

Ορισμός: Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Ένα διάνυσμα $\vec{x} \neq 0$ θα λέγεται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ αν :

$$(A-\lambda I)^p \vec{x} = 0, \text{ για κάποιο } p \in \mathbb{N}^*$$

Το σύνολο $K_\lambda(A) = \{x \in V : (A-\lambda I)^p x = 0\}$, για κάποιο $p \in \mathbb{N}^*$ λέγεται **γενικευμένος ιδιόχωρος** του A αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ.

Περιλαμβάνει τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής.

Για να βρούμε τα **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα** X_ι ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Αφού βρούμε πρώτα το ιδιοδιάνυσμα X_1 αντίστοιχο της ιδιοτιμής, βρίσκουμε τα επόμενα ως εξής: $(A-\lambda I)X_2 = X_1$, $(A-\lambda I)X_3 = X_2$ κλπ.

<u>Σημείωση 1:</u> Εάν δεν ζητείται να βρεθεί ο πίνακας P ή η κανονική βάση Jordan, τότε δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα.
<u>Σημείωση 2:</u> Εάν ένας πίνακας έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα K, τότε έχει μια κανονική μορφή Jordan.Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, αυτό σημαίνει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πρέπει να είναι πραγματικές.
<u>Σημείωση 3:</u> Στην περίπτωση που ένας πίνακας διαγωνοποιείται, τότε η κανονική μορφή Jordan ταυτίζεται με τον διαγώνιο πίνακα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u> Έστω A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x) = (x-4)^3$ και ελάχιστο $p_A(x) = (x-4)^2$.

Επομένως θα έχουμε 1 Jordan block (1 ιδιοτιμή) και 1 υποπίνακα 2×2.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $\vec{u} = (\kappa+\lambda, \kappa, \lambda)$, πχ τα :

X_1 = (1, 1, 0) και X_2 = (1, 0, 1). Χρειαζόμαστε ακόμα 1 για την βάση Jordan:

$(A-4I)X_3 = X_2$ και λύνοντας το παίρνουμε $X_3 = (1,1,1)$.

(Επιλέξαμε το διάνυσμα X_2, γιατί αν πάρουμε το διάνυσμα X_1, το σύστημα $(A-4I)X_3 = X_1$ είναι αδύνατο, δηλαδή ο ιδιόχωρος του X_1 δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα).

Επομένως η βάση Jordan είναι η β = {X_2, X3, X_1 }.

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $J = P^{-1}AP$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u> Έστω Α= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_A(x) = p_A(x) = (x-1)^2 (x-5)$.

Επομένως θα έχουμε 2 Jordan block (2 ιδιοτιμές) και 1 υποπίνακα 2×2

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η ιδιοτιμή λ = 5 έχει για ιδιοδιάνυσμα το X_1 =(-4, -3, 9)

Η ιδιοτιμή λ = 1 έχει για ιδιοδιάνυσμα το X_2 =(0, 1, 1)

Το 3^o ιδιοδιάνυσμα που «λείπει» (γενικευμένο) θα το βρούμε ως εξής:

$(A-I)\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$, και βρίσκουμε το X_3 =(-1, 1, 0). Επομένως,

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa\alpha\iota \quad P^{-1}AP = J.$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u> Έστω Β= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_B(x) = p_B(x) = (x-1)^2 (x-2)$. Ιδιοτιμές είναι οι λ = 1 (διπλή) και λ = 2.

Επομένως θα έχουμε 2 Jordan block και 1 υποπίνακα 2×2.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η ιδιοτιμή λ = 2 έχει ιδιοδιάνυσματα της μορφής (0, κ, κ) πχ, το X_1 =(0, 1, 1)

Η ιδιοτιμή λ = 1 έχει ιδιοδιάνυσματα της μορφής (κ, κ, κ) πχ, το X_2 =(1, 1, 1)

Βρίσκουμε και το 3^o ιδιοδιάνυσμα που «λείπει» (το γενικευμένο της ιδιοτιμής λ = 1):

$(A-I)\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$, και παίρνουμε X_3 =(κ, κ, κ-1), πχ το X_3 =(1, 1, 0).

Επομένως, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa\alpha\iota \quad P^{-1}BP = J$, με $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Έστω Z= $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_Z(x) = x^2(x-2)^2, \quad p_Z(x) = x^2(x-2)$.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ = 0 είναι το X_1 = (1,1 ,1, 1)

Βρίσκουμε και το γενικευμένο της ιδιοτιμής λ = 0: $A\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$, και παίρνουμε X_2 =(0, -1, -2, 0). Η ιδιοτιμή λ = 2 έχει 2 γραμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα X_3 = (1,0 ,0, 1) και X_4 = (-1,1 ,1, 0). Επομένως ο πίνακας P είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = P^{-1}ZP$$

Θεώρημα: Οι όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan.
(Προφανώς με κάποια πιθανή αναδιάταξη των block).
Αντιστρόφως, πίνακες με την ίδια κανονική μορφή Jordan είναι μεταξύ τους όμοιοι.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο όλων των πινάκων διασπάται σε ένα πλήθος «οικογενειών πινάκων» με την ακόλουθη ιδιότητα:
Όλοι οι πίνακες της ίδια ς οικογένειας έχουν την ίδια μορφή Jordan και είναι μεταξύ τους όμοιοι. Οι πίνακες διαφορετικών «οικογενειών» δεν είναι όμοιοι.

Υπενθύμιση: **Οι πίνακες A κ B είναι όμοιοι εάν αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε** $B = P^{-1}AP$
Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές (με ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα)