26 ΜΑΙΟΥ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN $A^{4\times 4}$

ΟΤΑΝ ΔΕΝ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

$$\left(A = P \Delta \cdot P^{-1}\right) \longrightarrow A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

ιδιοδιανύσματα σε στήλες.

(πλήρης η βάση από ιδιοδιανύσματα)

ιδιοδιανύσματα, και

γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

• χαρ/κο πολυώνυμο. $P_A(x) \to$ ιδιοτιμές

• <u>ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ</u> $\longrightarrow$ block, μικρά block $\to$ 1, 1, ..

<u>πχ</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\operatorname{rank}(A) = 1$

$\lambda_i = 0, 0, 3$. 3 ιδιοδιαν.

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ $\longrightarrow$

$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$ (όχι JORDAN) <u>γιατί:</u>

$$\begin{cases} h_A(x) = x^2(x-3) & (\text{χαρ/κο}) \\ P_A(x) = x(x-3) & (\text{ΕΛΑΧΙΣΤΟ}) \end{cases}$$

$\dashv \left(A(A-3I) = \mathbb{O} \right)$ πρώτου βαθμού παράγοντες

Μεγάλο Block

πχ2

Χαρ/κο: $\boxed{h_A = (x-1)^3(x-3)^4}$

Jordan:

ελάχιστο $\boxed{p_A = (x-1)^2(x-3)^2}$

υπο. block (μικρό block)

ΠΙΘΑΝΕΣ ΜΟΡΦΕΣ JORDAN:

$\boxed{A^{7\times 7}}$

2 πιθανές λύσεις

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ή

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$n \times 3$ χαρ/κο : $(x+5)^3 (x-6)^2$

5×5 ελάχιστο : $(x+5)^2 (x-6)$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = J$$

Χαρ/κο: $(x-2)^3 (x+4)^2$

5×5

ΕΛΑΧΙΣΤΟ = ΙΔΙΟ

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ & 2 & 1 & & 0 \\ 0 & & 2 & & \\ \hline & 0 & & -4 & 1 \\ & & & 0 & -4 \end{array}\right] = J$$

Άρα $\boxed{A = P \cdot J \cdot P^{-1}}$

ιδιοδιανύσματα + {γενικευμένα ιδιοδιανύσματα..}

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑ:

$A^{n\times n}$ → της ιδιοτιμής λ : $\vec{u}$

$$(A-\lambda I)^p \vec{u} = \vec{0}$$

για κάποιο $p \in \mathbb{N}^+$.

για $p=1$: $(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{u} = \lambda\vec{u}$
ιδιοδιάνυσμα

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$ (3πλή)

χαρ/κο πολυώνυμο: $\chi_A(x) = (x-4)^3$

ελάχιστο // : $p_A(x) = (x-4)^2$

<u>Ιδιοδιανύσματα:</u> $A\vec{u} = 4\vec{u} \Rightarrow$

.... $\vec{u} = \begin{pmatrix} \kappa+\lambda \\ \kappa \\ \lambda \end{pmatrix} =$

$\kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Βάση του ιδιόχωρου

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ΛΕΙΠΕΙ ΕΝΑ. (γενικευμένο

ΑΡΑ: $(A-\lambda I)\vec{x}_3 = \vec{x}_1$ ή $(A-\lambda I)\vec{x}_3 = \vec{x}_2$

Ⓐ Ⓑ

$$\downarrow$$

Ⓐ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z &= 1 \\ 0 &= 1 \\ -x+y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ΑΔΥΝΑΤΟ}$$

ΠΑΩ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ⓑ

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{x}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_2} \Rightarrow$$

$-x+y+z=1 \rightarrow$ η ίδια εξίσωση

$0=0$

$-x+y+z=1 \rightarrow x=y+z-1$

$$\begin{pmatrix} k+\lambda-1 \\ k \\ \lambda \end{pmatrix} = \vec{x}_3$$

Γενικευμένο Ιδιοδιάνυσμα

πχ $\underline{\underline{k=\lambda=1}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}_3$

Άρα

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ή

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_2 & x_3 & x_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad *$$

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} *$$

Απο 2ο $\to X_3$

ή $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

A ομοιος B $\iff J_A = J_B$

$$\boxed{A = C \cdot B \cdot C^{-1}}$$