6 Απειλιών :

ΑΝ :

$\boxed{A\ (n\times n)}$ 1) $\underline{n}$ διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_i

ή 2) $\underline{n}$ Γ.Α. ιδιοδιανύσματα

3) Αν το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο 1 βαθμιών.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

ιδιοτιμές →

$$A^k = PD^k \cdot P^{-1}$$

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_i = 3, 3, 5$$

Ιδιοδιανύσματα ?

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ <u>NAI</u>

$(\lambda=3) \qquad \lambda=5$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}P^{-1}$$

<u>ριζΑ:</u>

$$A^{1/2} = P\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\0 & \sqrt{3} & 0\\0 & 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}P^{-1} = \ldots$$

ΤΟ ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

(spectral theorem)

$A^{n\times n}$: $A = A^T \Longrightarrow$ διαγωνοποιείται.

με P = ορθογώνιος $(Q^T = Q^{-1})$

$A = QDQ^T$ (Q = ορθογώνιος)

(Cauchy) 1827

Πχ Σ : πίνακας διακύμανσης

Covariance matrix

$$\Sigma = \Sigma^T$$

Πρόταση 1: $A^{n\times n}$: $A^k = \mathbb{O}$ (ΜΗΔΕΝΟΔΥΝΑΜΟΣ για κάποιο k)

Τότε: $\sigma(A) = \{0\}$

Αποδ: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x} \Rightarrow$

$\mathbb{O}\vec{x} = \lambda^k\vec{x} \rightarrow \lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

ΟΛΕΣ.

$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

$\vec{u} \neq \vec{0}$

Πρόταση 2 : Έστω $A^{n\times n}$

$A^3 = A \Rightarrow \lambda = 0, \pm 1$

Αποδ: $A\vec{u} = \lambda\vec{u} \rightarrow A^3\vec{u} = \lambda^3\vec{u}$

$A^3 = A \rightarrow \lambda^3\vec{u} = \lambda\vec{u} \rightarrow$

$(\lambda^3 - \lambda)\vec{u} = \vec{0} \rightarrow \lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

$P_A(x) \longrightarrow$ ελάχιστο

$h_A(x) \longrightarrow$ χαρ/κο

$h_A(A) = 0$ (C.H.)

$3x^2 - 5x + 8 = 0 \rightarrow$

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{8}{3} = 0$ ✓

χαρ/κο : $\boxed{h_A(x) = (x-3)^2(x+1)^2}$

$A^{4\times 4}$

πιθανά ελάχιστα :
- $(x-3)\cdot(x+1)$
- $(x-3)^2\cdot(x+1)$
- $(x-3)(x+1)^2$
- $(x-3)^2(x+1)^2$ = χαρ/κο

(με δοκιμή)

πχ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $h_A(x)$:

$|A - \lambda I| = 0$

$\Rightarrow \dots \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0$

$\begin{cases} \lambda = -1 \text{ διπλή} \\ \lambda = 5 \end{cases}$

$\boxed{h_A(x) = (x+1)^2(x-5)}$

ελαχ

ΠΙΘΑΝΑ ΕΛΑΧΙΣΤΑ:

$\boxed{P_1(x) = (x+1)(x-5)}$

$P_2(x) = (x+1)^2 \cdot (x-5)$

Δοκιμή:

$P_1(A) = (A+I)(A-5I) = \dots \emptyset$

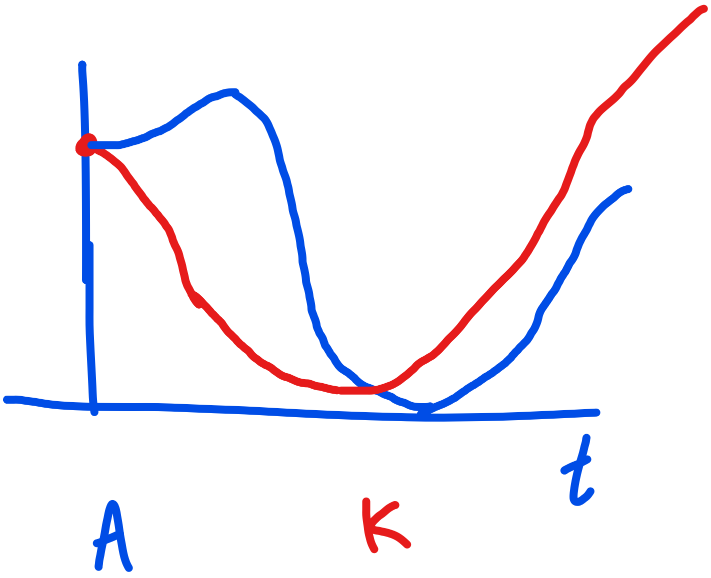
✓ ελάχιστο $P_1(x)$

$\boxed{\text{Διαγωνοποιείται}}$

$$\boxed{\text{γινόμενο } \lambda_i = \det(A)}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\vec{x}_{k+1} = A \cdot \vec{x}_k$$



πχ ΚΑΙΡΟΣ

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} Η \\ Σ \\ Β \\ Χ \end{pmatrix}$$

πχ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = ηλιο

$$\boxed{x_{k+1} = PDP^{-1} \cdot x_k}$$

$\boxed{x_0 = \text{αρχικό διάνυσμα}}$

$x_1 = A x_0$

$x_2 = A x_1 = A^2 x_0$

$x_3 = A^3 x_0 \quad \ldots$

$$A^n x_0 = x_n$$

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

πχ 1 ΚΕΝΤΡΟ - ΠΡΟΑΣΤΕΙΑ

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{(Από)} & \\
 & K \quad\quad \Pi & \\
A = & \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} & \begin{matrix} K \text{ (προς)} \\ \Pi \end{matrix}
\end{array}
$$

(πιθανότητες)

ΑΘΡΟΙΣΜΑ = 1

(Στοχαστικός πίνακας)

ΜΑΚΡΟΧΡΟΝΙΑ?

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

600000 κέντρο, 400000 προαστ.

$A^n \vec{x_0} = ?$ (ΜΑΚΡΟΧΡΟΝΙΑ)

$n \to +\infty$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}92$ $\to$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x_n = A^n x_0 = PDP^{-1} \cdot x_0 =$ $\boxed{n \to \infty}$

(n μεγάλο) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}92^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$ * $0{,}92^n \to 0$

Στοχαστικοί πίνακες:

1) $|\lambda_i| \leq 1$, $\lambda \geq 0$

2) Τουλάχιστον μια $\lambda = 1$

3) $A \cdot B =$ στοχαστικός

(A, B στοχαστικοί). $A^k =$ στοχαστ.

$$* = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

375000 — ΚΕΝΤΡΟ

625000 — προάστεια

πχ 2 — ΚΑΙΡΟΣ

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & H & B & \\ \hline & 0,7 & 0,6 & H \\ & 0,3 & 0,4 & B \end{array}$$

Σήμερα έχει ήλιο

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} H \\ B \end{matrix}$$

Σε 5 μέρες?

$$A^5 \cdot \vec{x_0} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,6 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}^5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$0,667 \rightarrow$ ΗΛΙΟ

$0,333 \rightarrow$ ΒΡΟΧΗ

σε 5 μέρες