# Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

Διάλεξη 10/3/22

## 1 Πινακές προβολής

**Ορισμός 1** *(Πίνακας προβολής) Ως πίνακα προβολής ορίζουμε τον*

$$P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top$$

**Θεώρημα 1** *Ένας πινακας $P$ ειναι προβολή αν*

- $P^2 = P$
- $P^\top = P$

Ο πίνακας προβολής προβάλει στον $\mathcal{R}(A)$, το συνολο τιμών δηλαδη του $A$ (ή ισοδύναμα των χώρο των στηλών του $A$) και είναι $m \times n$ - όχι απαραίτητα τετραγώνικος.

Αν $b \notin \mathcal{R}(A)$ τοτε $P_A b = b_1$ και $b = b_1 + b_2$ οπου $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ και $b_2 \in \mathcal{R}(A)^\top$. Αρα παρατηρούμε οτι " κόβει" το διάνυσμα $b$ σε 2 άλλα, τα $b_1$ και $b_2$.
Αν ο πινακας $A$ αντιστρέφεται τοτε $P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top = AA^{-1}{A^\top}^{-1}A^\top = I$. Άρα $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$.
**Σημείωση:** το κομμάτι $(A^\top A)^{-1}A^\top$ ονομάζεται *ψευδοαντίστροφος* και συμβολίζεται με $A^\dagger$ για καποιον πινακα $A_{n\times m}$ μη αντιστρέψιμο.

**Θεώρημα 2** *Αν $A \subset V$, οπου $V$ γραμμικός υπόχωρος και $P_A$ προβολή, αν $Px = \hat{x}$ τοτε*

$$||x - \hat{x}|| \leq ||x - y|| \quad \textit{για} \quad \textit{κάθε} \quad y \in A,$$

*δηλάδη το $\hat{x}$ είναι η μίκροτερη απόσταση.*

**Παράδειγμα 1** *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Παρατηρούμε οτι $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $rank(A) = 2 < dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Εχουμε λοιπον οτι:*

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ x+k \\ 2x+k \end{bmatrix} x, k \in \mathbb{R}$$

*Ας βρούμε τον πίνακα προβολής. Εχουμε*

$$P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top = \cdots = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}$$

*Αν δράσουμε στο $u^\top = (1, -2, 3)$ τον πίνακα προβόλης θα έχουμε:*

$$P_A u = \cdots = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

*όπου παρατηρούμε οτι ανήνει στον $\mathcal{R}(A)$.*

## 2 Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή των πινάκων προβολής ειναι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Έστω οτι έχουμε διμεταβλητά δεδομενα $(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots n$ και θέλουμε να τα προβάλουμε σε μια ευθεία της μορφής $y = a + bx$. Βάσει οσων έχουμε πει ως τώρα ο πίνακας προβόλης είναι εκείνος που θα προβάλει τα δεδομένα στην ευθεία. Έχουμε λοιπόν οτι

$$y = Ax \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

όπου αναζητάμε το διανυσμα των $\alpha$ και $\beta$. Εχουμε λοιπον οτι

$$Ax = y \Rightarrow A^\top Ax = A^\top y \Rightarrow x = (A^\top A)^{-1} A^\top y$$

ή ισοδύναμα

$$y = A\hat{x} = A(A^\top A)^{-1} A^\top y \Rightarrow \hat{y} = P_A x$$

**Παράδειγμα 2** *Έστω οτι μας δίνονται τα παρακάτω δεδομένα*

| Χρόνια $(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Πωλήσεις σε χιλ. €$(y)$ | 23 | 27 | 30 | 34 |

*Θέλουμε να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετράγωνων. Κατασκευάζουμε λοιπόν τον πινακα $A$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

*και έχουμε*

$$Ax = y \Rightarrow A^\top Ax = A^\top y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 \\ 303 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{y} = 19.5 + 3.6x$$

*Αν θέλαμε για παράδειγμα να προβλέψουμε, βάσει του παραπάνω μοντέλου, τι θα συνέβαινε στις πωλήσεις 5ο τον χρόνο θα είχαμε $\hat{y} = 19.5 + 3.6 * 5 = 37.5$. Σημειώνουμε οτι τα σήμεια $(x_n, y_n)$ δεν βρισκόνται πάνω στην ευθεία, αλλα έχουν την μικρότερη αποσταση απο αυτην. Ορίζουμε ως σφάλμα την απόκλιση τους απο την ευθεία*

$$\epsilon_i = Ax_i - y_i = \hat{y_i} - y_i$$

*το οποίο θέλουμε εν γένει να ελάχιστοποιήσουμε. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με τεχνικές διαφορικού λογισμού αλλα είναι κάτι που δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.*

**Θεώρημα 3** *Εστω $P_x b = b_1$. Αν $b \notin \mathcal{R}(A)$ τοτε η $Ax = b$ γινεται $Ax = b_1$ αρα $b - b_1 \in N(A^\top)$*

**Ιδιότητες λύσης ελαχίστων τετραγώνων:**
(1) Λύνει την $A^\top Ax = A^\top b$.
(2) Αν είναι μοναδική τοτε $rank(A) = n$ και $\hat{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top b$.
(3) Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε η λύση ελαχίστων τετραγώνων είναι $\hat{x} = A^{-1} b$.
(4) Το $\sum_i \epsilon_i^2 = (Ax - b)^\top (Ax - b)$ γίνεται ελάχιστο για $x = \hat{x}$.

**Παράδειγμα 3** *Εστω οτι έχουμε τα δεδομένα*

| Ημέρες ($t$) | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Θερμοκράσια ($c$) | -10 | -5 | 0 | -10 | -5 | 0 | -10 | -5 | 0 |
| Μάζα ($G$) | 0.15 | 0.18 | 0.20 | 0.17 | 0.19 | 0.22 | 0.20 | 0.23 | 0.25 |

*Θέλουμε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο της μορφής*

$$G = a_0 + a_1 t + a_2 c$$

*οπότε πρέπει να λύσουμε την* $Ax = b$ *οπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.18 \\ \vdots \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

*Έχουμε λοιπόν οτι* $Ax = b \Rightarrow A^\top Ax = A^\top b$ *ή ισοδύναμα*[1]

$$\begin{bmatrix} 9 & 18 & -45 \\ 18 & 42 & -90 \\ -45 & -90 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.79 \\ 3.73 \\ 8.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.174 \\ 0.025 \\ 0.005 \end{bmatrix}$$

*Αρα τελικώς το μοντέλο είναι*

$$G = 0.174 + 0.025t + 0.005c$$

[1] Η τελευταια ισότητα λέγεται και κανονική εξίσωση.