3 Μαρτίου

Γραμμ. απεικονίσεις

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

~~πχ~~

$\boxed{y = ax \text{ στον } \mathbb{R}^2}$

$\Longleftrightarrow$ ΕΝΑΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

πχ

$T(x,y) = (x, y, x+y)$ $(\mathbb{R}^4)$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 1)$

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, 1, 1)$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

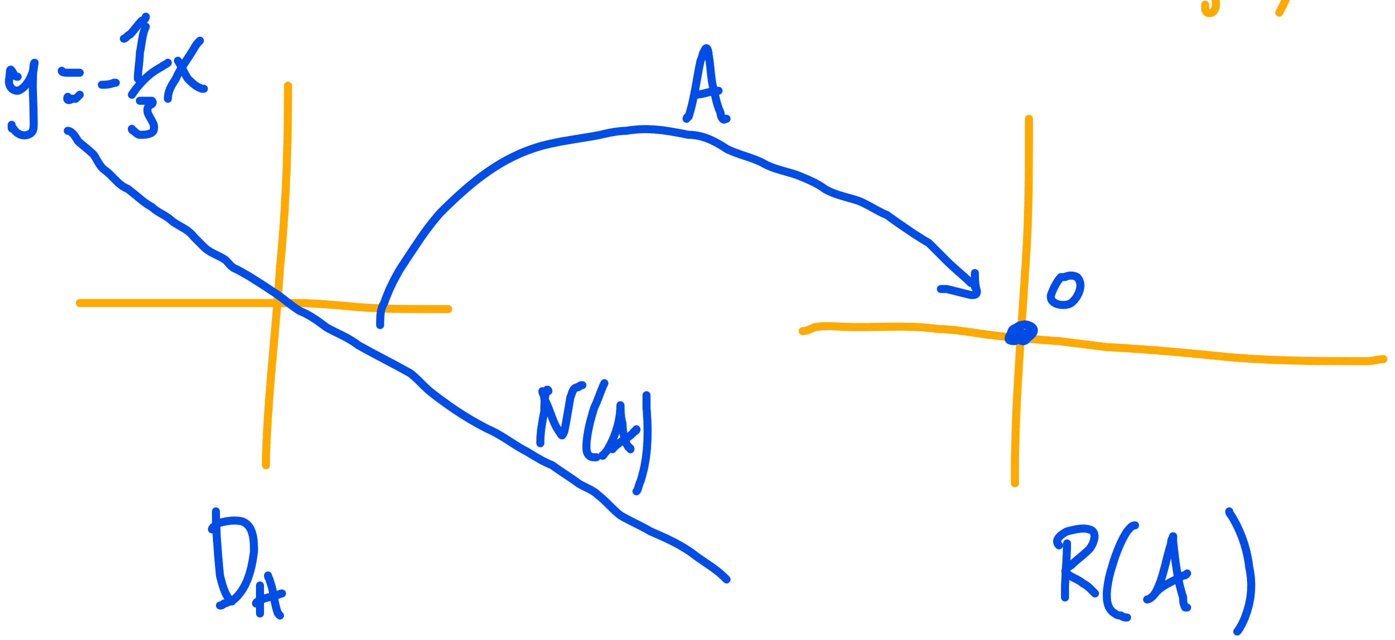
Πυρήνας: $N(A)$ (Μηδενόχωρος)

$$\left\{ \vec{x} : \left\{ A\vec{x} = \vec{0} \right\} \right\}$$

Ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cancel{2x+6y=0} \\ x+3y=0 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x \qquad \begin{pmatrix} k \\ -\frac{1}{3}k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$



$$\boxed{A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2}$$

Form V : A.x. (vector space)

NORM

ΝΟΡΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$\|\vec{u}\| =$ αριθμός.

1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, Αν $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

2) $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}}$$

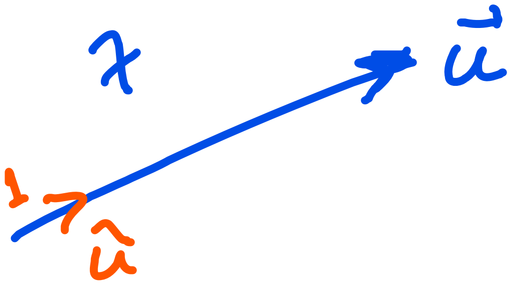
πχ $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots}$

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|u\| = 1$

$\|u\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$

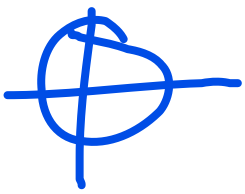
$\hat{u}$ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ $= \begin{pmatrix} 6/7 \\ -3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$



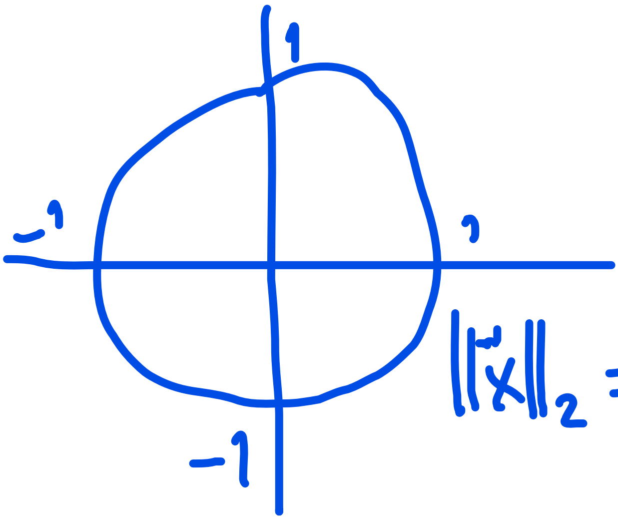
$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max |x_i|$$

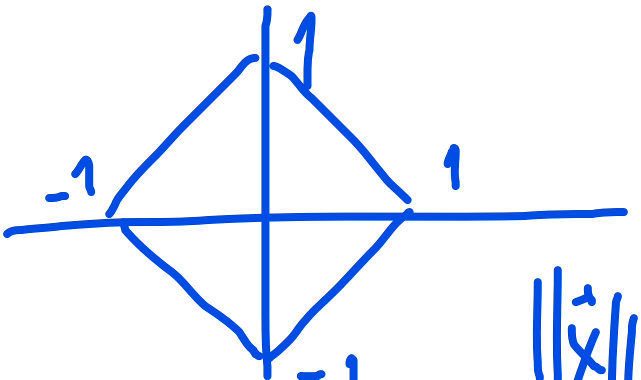
(sup norm)



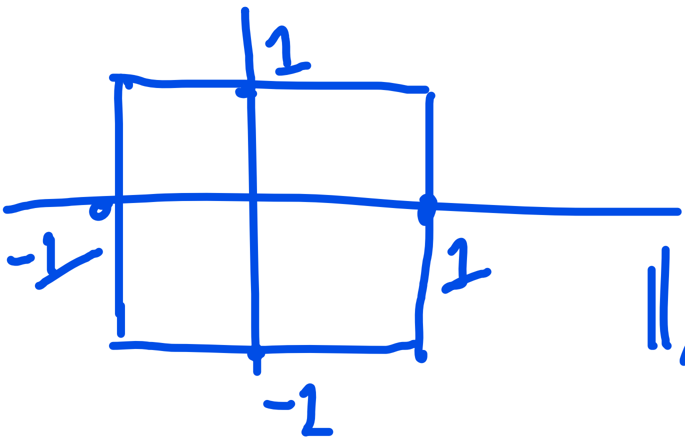
ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΦΑΙΡΑ



$\|\vec{x}\|_2 = 1$



$\|\vec{x}\|_1$



$\|\vec{x}\|_\infty$

MATRIX NORMS:

(Νόρμες πινάκων.)

$A^{m \times n}$

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{MAX}}$ (λ = ιδιοτιμές)
- $\|A\|_1$ = Μεγαλύτερο (απολύτως) Άθροισμα στηλών
- $\|A\|_\infty$ = Μεγαλύτερο (απολύτως) Άθροισμα γραμμών

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_1 = 14$

$\|A\|_\infty = 13.$

ΚΑΙ $\|A\|_F = \text{trace}(A^T A)$

(Frobenius norm)

ΙΧΝΟΣ

trace ενος $A^{n \times n}$ = αθροισμα διαγωνιων στοιχειων

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

trace = 12

$A^T A$ = τετραγων.

Εσωτ. Γινόμενο $\left(\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v| \cos\theta \right)$

$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \text{αριθμός}}$

Εστω V δ.χ. , $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$\boxed{k, \lambda \in \mathbb{R}}$: 1) $\langle k\vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{z} \rangle = k \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \lambda \cdot \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ (Αν $= 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$)

πχ Θεωρώ στον δ.χ. $C_{[0,1]}$ (continuous) (συνεχείς συναρτήσεις)

$$\boxed{\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx}$$

Αν $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ στο $[-\pi,\pi]$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cos x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$\boxed{\sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{0}}$$

Άρα $f(x) \perp g(x)$

βάσει του $\langle f,g\rangle$

που όρισα.

Τιπ 2: $\langle A, B \rangle = \text{trace}(B^T \cdot A)$

$(A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}) = $ αριθμός.

για τι όχι?
$A \cdot B = \ldots$
όχι αριθμός

Αποστάση σε χώρους με norm:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

1) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,w) + d(y,w)$

NORM $\longrightarrow$ προέρχεται από $\langle u, v \rangle$

Ορισμός: $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$

Δ.Χ με νόρμα, η οποία επάγεται από $\langle x,y\rangle$ και απόσταση οριζόμενη από νόρμα

ΠΛΗΡΗΣ Δ.Χ

(χώρος Hilbert)

---

4 ΥΠΟΧΩΡΟΥΣ:

$R(A)$ $\quad N(A)$ $\quad R(A^T)$ $\quad N(A^T)$

ΜΗΔΕΝΟΧΩΡΟΣ

οδηγός (pivot)

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(A^T): (1,3,2)^T$$

$$R(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = \text{στήλες}$$

$$2 + 1 = 3$$

$$\begin{cases} R(A) = N(A^T)^{\perp} \\ N(A) = R(A^T)^{\perp} \end{cases}$$