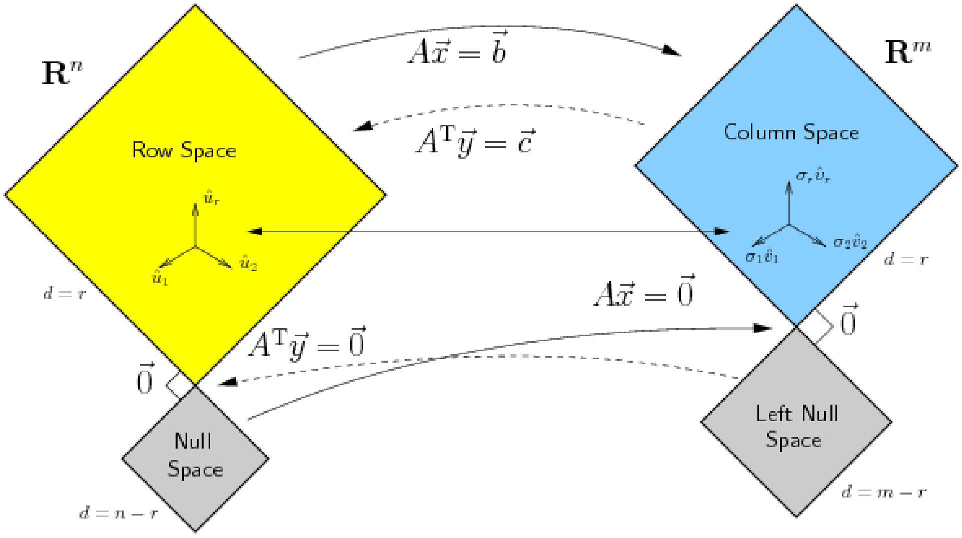
Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ

Δημήτρης Παππάς
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

Ακαδημαικό έτος 2021-2022



Το μάθημα κατ' αρχάς συνεχίζει την θεωρία των πινάκων και διανυσματων του $\mathbb{R}^n$ που έγινε στο μάθημα Γραμμική Άλγεβρα 1. Επικεντρωνόμαστε σε κάποια ζητήματα που έχουν σημαντικές εφαρμογές στη στατιστική: προβολές και ελάχιστα τετράγωνα, ορίζουσες, καθώς και ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα πινάκων, διαγωνοποίηση πινάκων (συμμετρικών η μή) και αναλύουμε διεξοδικά τις τετραγωνικές μορφές και τις εφαρμογές τους στα ακρότατα.
Στη συνέχεια μελεταμε σημαντικά αποτελέσματα της Γραμμικής Άλγεβρας:
Την διάσπαση Ιδόμορφων τιμών (SVD) , την Ορθοκανονικοποίηση - Gramm - Schmidt , την παραγοντοποίηση QR, τον ψευδοαντίστροφο πίνακα $A^\dagger$, το Θεώρημα $Cayley - Hamilton$, τους Ορθογώνιους πίνακες και δίνουμε παραδείγματα απο δυναμικά συστήματα και στοχαστικούς πίνακες ως εφαρμογές των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Τελος μελετάμε την Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών, (PCA) καθως και την κανονική μορφή Jordan.

Υλη Γραμμικης Άλγεβρας 2

- Ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης και πολυωνυμική προσέγγιση
- Ορίζουσες και πίνακες προβολης
- Ομοιοι Πίνακες
- Ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα
- Θεώρημα Cayley - Hamilton και ελάχιστο πολυώνυμο
- Διαγωνοποίηση, το Φασματικό Θεώρημα
- Παραγοντοποίηση QR
- Ορθοκανονικοποίηση - Gramm - Schmidt
- Τετράγωνικες μορφές και η κανονική μορφή αυτών.
- Ακρότατα και πηλικο Rayleigh
- Στοχάστικοι πίνακες - δυναμικά συστήματα
- Διάσπαση ιδιάζουσων τιμών (SVD)
- Πινάκας διακύμανσης συνδιακύμανσης
- Πινάκας συσχέτισης
- Ο εκθετικός Πινάκας
- Ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA)
- Ο Ψευδοαντιστροφος πίνακας $A^\dagger$
- Τετραγωνική ρίζα πίνακα, πολική διάσπαση πίνακα
- Κανονική Μορφή Jordan

  Αυτές οι σημειώσεις ειναι μια σύντομη παρουσίαση της ύλης του μαθήματος Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, για παραπάνω λεπτομέρειες οι φοιτητές παρακαλούνται να ανατρέξουν στα βιβλία που τους διανέμονται.
  Ευχαριστώ πολύ στον παλιό φοιτητή μου Γιώργο Δομαζάκη για την βοήθεια στην δακτυλογράφηση αυτων των σημειώσεων οταν ηταν ακομα προπτυχιακός φοιτητής.

1 Εισαγωγή- Επανάληψη της Γραμμικής Άλγεβρας 1

Σαν επανάληψη της Γραμμικής 1, τα κυριότερα σημεία είναι:
Γραμμικές απεικονίσεις, οι 4 θεμελιώδεις υπόχωροι, Εσωτερικά γινόμενα και ιδιότητες (και παραδείγματα των παραπάνω.)

- Ορισμός και ιδιότητες νόρμας, Νόρμες διανυσμάτων, νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο σε Γραμμικο χώρο, παραδείγματα, μοναδιαίοι κύκλοι σε κάθε περίπτωση.
- Απόσταση διανυσμάτων σε γραμμικό χώρο.
- Ορθογώνιοι Υπόχωροι- Το θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας 2:
  Έστω ο πίνακας Α, $m \times n$. Τότε,

  $$N(A) = R(A^T)^{\perp}$$
  $$R(A) = N(A^T)^{\perp}$$

  Επίσης, οι διαστάσεις αθροίζονται:

  $$dim(N(A)) + dim(R(A^T)) = n$$
  $$dim(N(A^T)) + dim(R(A)) = m$$

  Υπενθύμιση, Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας μέρος πρώτο, μας λέει οτι:
  Έστω ο πίνακας Α, $m \times n$ και με $rank(A) = r$. Τότε,

  $$dimR(A) = r, \quad , dimN(A) = n - r, \quad dimR(A^T) = r, \quad dimN(A^T) = m - r$$

- Ίχνος (trace) πίνακα $A, tr(A)$.
- Εσωτερικό γινόμενο $< A, B >= tr(B^\top A)$, παραδείγματα.

Έτσι, έχοντας καταλήξει σε εναν διανυσματικό χώρο που η νόρμα του επάγεται απο εσωτερικό γινόμενο (Χώρος Hilbert) έχουμε ολες τις γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου: Απόσταση (νορμα), γωνία (εσωτερικό γινόμενο) συνδεδεμένα μεταξύ τους.

2 Πινακές προβολής, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, Γραμμική παλινδρόμηση με πολλές μεταβλητές

2.1 Πινακές προβολής

Ορισμός 1 *Πίνακας προβολής (Projection matrix)*
Ως πίνακα προβολής ορίζουμε τον

$$P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top$$

Θεώρημα 1 *Ένας πινακας P εʋναι προβολή αν*

- $P^2 = P$
- $P^\top = P$

Ο πίνακας προβολής προβάλλει στον $\mathcal{R}(A)$, το συνολο τιμών δηλαδη του A (ή ισοδύναμα των χώρο των στηλών του A) και είναι $m \times n$ - όχι απαραίτητα τετραγώνικος.

Αν $b \notin \mathcal{R}(A)$ τοτε $P_A b = b_1$ και $b = b_1 + b_2$ οπου $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ και $b_2 \in \mathcal{R}(A)^\top$. Αρα παρατηρούμε οτι " κόβει" το διάνυσμα b σε 2 άλλα, τα b_1 και b_2.
Αν ο πινακας A αντιστρέφεται τοτε $P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top = AA^{-1}A^{\top^{-1}}A^\top = I$. Άρα $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$.
Σημείωση: το κομμάτι $(A^\top A)^{-1}A^\top$ ονομάζεται *ψευδοαντίστροφος* και συμβολίζεται με $A^\dagger$ για καποιον πινακα $A_{n\times m}$ μη αντιστρέψιμο.

Θεώρημα 2 *Αν $A \subset V$, οπου V γραμμικός υπόχωρος και P_A προβολή, αν $Px = \hat{x}$ τοτε*

$$||x - \hat{x}|| \leq ||x - y|| \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad y \in A,$$

δηλάδη το $\hat{x}$ είναι η μίκροτερη απόσταση.

Παράδειγμα 1 *Έστω*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε οτι $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $rank(A) = 2 < dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Εχουμε λοιπον οτι:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ x+k \\ 2x+k \end{bmatrix} x, k \in \mathbb{R}$$

Ας βρούμε τον πίνακα προβολής. Εχουμε

$$P_A = A(A^\top A)^{-1} A^\top = \cdots = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Αν δράσουμε στο $u^\top = (1, -2, 3)$ τον πίνακα προβόλης θα έχουμε:

$$P_A u = \cdots = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

όπου παρατηρούμε οτι ανήνει στον $\mathcal{R}(A)$.

2.2 Η Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή των πινάκων προβολής ειναι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Έστω οτι έχουμε διμεταβλητά δεδομενα (x_i, y_i), $i = 1, \ldots n$ και θέλουμε να τα προβάλουμε σε μια ευθεία της μορφής $y = a + bx$. Βάσει οσων έχουμε πει ως τώρα ο πίνακας προβόλης είναι εκείνος που θα προβάλει τα δεδομένα στην ευθεία. Έχουμε λοιπόν οτι

$$y = Ax \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

όπου αναζητάμε το διανυσμα των α και β. Εχουμε λοιπον οτι

$$Ax = y \Rightarrow A^\top Ax = A^\top y \Rightarrow x = (A^\top A)^{-1} A^\top y$$

ή ισοδύναμα

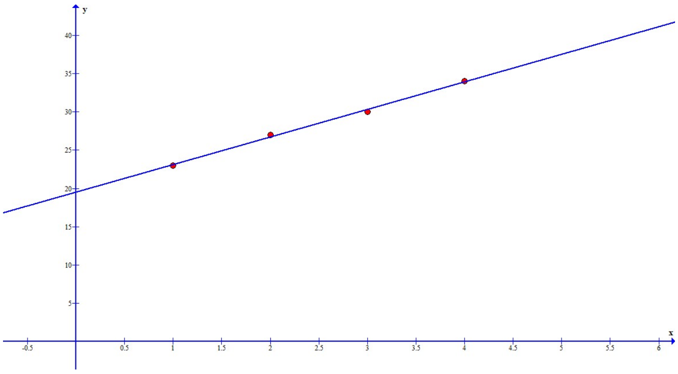
$$y = A\hat{x} = A(A^\top A)^{-1} A^\top y \Rightarrow \hat{y} = P_A x$$

Παράδειγμα 2 *Έστω οτι μας δίνονται τα παρακάτω δεδομένα*

Χρόνια (x)	1	2	3	4
Πωλήσεις σε χιλ. €(y)	23	27	30	34

Θέλουμε να βρούμε την ευθεία ελαχίστων τετράγωνων. Κατασκευάζουμε λοιπόν τον πινακα A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 1: Η ευθεία και τα δεδομένα

και έχουμε

$$Ax = y \Rightarrow A^\top Ax = A^\top y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 114 \\ 303 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{y} = 19.5 + 3.6x$$

Αν θέλαμε για παράδειγμα να προβλέψουμε, βάσει του παραπάνω μοντέλου, τι θα συνέβαινε στις πωλήσεις 5ο τον χρόνο θα είχαμε $\hat{y} = 19.5 + 3.6 * 5 = 37.5$. *Σημειώνουμε οτι τα σήμεια* (x_n, y_n) *δεν βρισκόνται πάνω στην ευθεία, αλλα έχουν την μικρότερη αποσταση απο αυτην. Ορίζουμε ως σφάλμα την απόκλιση τους απο την ευθεία*

$$\epsilon_i = Ax_i - y_i = \hat{y}_i - y_i$$

το οποίο θέλουμε εν γένει να ελάχιστοποιήσουμε. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε με τεχνικές διαφορικού λογισμού αλλα είναι κάτι που δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

Θεώρημα 3 *Εστω* $P_x b = b_1$. *Αν* $b \notin \mathcal{R}(A)$ *τοτε η* $Ax = b$ *γινεται* $Ax = b_1$ *αρα* $b - b_1 \in N(A^\top)$

Ιδιότητες λύσης ελαχίστων τετραγώνων:
(1) Λύνει την $A^\top Ax = A^\top b$.
(2) Αν είναι μοναδική τοτε $rank(A) = n$ και $\hat{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top b$.
(3) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε η λύση ελαχίστων τετραγώνων είναι $\hat{x} = A^{-1} b$.
(4) Το $\sum_i \epsilon_i^2 = (Ax - b)^\top (Ax - b)$ γίνεται ελάχιστο για $x = \hat{x}$.

2.3 Γραμμική Παλινδρόμηση σε πολλές μεταβλητές : $y = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$

Παράδειγμα 3 *Θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την ελλάτωση της μάζας ενος παγωτού που αποθηκεύεται. Αυτη εξαρτάται απο τις μέρες αποθήκευσης (σε εβδομάδες) και απο την θερμοκρασία αποθήκευσης. Εστω οτι έχουμε τα δεδομένα*

Εβδομάδες αποθήκευσης (t)	1	1	1	2	2	2	3	3	3
Θερμοκρασία αποθήκευσης (c)	-10	-5	0	-10	-5	0	-10	-5	0
Μάζα που χάθηκε (g)	0.15	0.18	0.20	0.17	0.19	0.22	0.20	0.23	0.25

Θέλουμε να προσομοιώσουμε ένα μοντέλο της μορφής

$$g = a_0 + a_1 t + a_2 c$$

οπότε πρέπει να λύσουμε την $Ax = b$ *οπου*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.18 \\ \vdots \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν οτι $Ax = b \Rightarrow A^\top Ax = A^\top b$ *ή ισοδύναμα*[1]

$$\begin{bmatrix} 9 & 18 & -45 \\ 18 & 42 & -90 \\ -45 & -90 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.79 \\ 3.73 \\ 8.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.174 \\ 0.025 \\ 0.005 \end{bmatrix}$$

Αρα τελικώς το μοντέλο είναι

$$g = 0.174 + 0.025t + 0.005c$$

Επομένως, εαν θέλουμε να προβλέψουμε ποση μάζα παγωτού θα χαθεί εαν αποθηκευτεί για $t = 9$ *εβδομάδες σε θερμοκρασία* $c = -35^o$*, αντικαθιστώντας παιρνουμε* $g = 0.224gr$

---

[1] Η τελευταια ισότητα λέγεται και κανονική εξίσωση.

2.4 Ασκήσεις

1. Εστω το διάνυσμα $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Να βρεθούν

α) Ενα διάνυσμα v κάθετο στο u

β) Να κατασκευάσετε απο αυτα μια ΟΚΒ

γ) Να κατασκευάσετε εναν ορθογώνιο 2×2 πίνακα Q.

Απάντηση Τα διανύσματα κάθετα στο u έχουν την μορφή $v = \begin{bmatrix} -2k \\ k \end{bmatrix}$, επομένως ενα απο αυτά είναι το $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Κανονικοποιόντας τα, παίρνουμε $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Ετσι, ενας ορθογώνιος πίνακας είναι $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

2.

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.

α) Είναι οι γραμμές του ορθογώνιες; **Σωστό**

β) Είναι οι στήλες ορθογώνιες; **Λάθος**

γ)Είναι ορθογώνιος; **Λάθος**

3.

Έστω οτι μας δίνονται τα παρακάτω δεδομένα

x	2	5	7	8
y	1	2	3	3

Να βρεθεί η ευθεία ελαχίστων τετράγωνων.

Απάντηση Κατασκευάζουμε τον πινακα A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

και έχουμε

$$Ax = b \Rightarrow A^\top Ax = A^\top b \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 57 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{y} = \frac{2}{7} + \frac{5}{14}x$$

4. ΝΑ βρεθεί η Λύση Ελαχίστων Τετραγώνων (ΛΕΤ) του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Απάντηση

$$Ax = b \Rightarrow A^\top Ax = A^\top b \Rightarrow \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

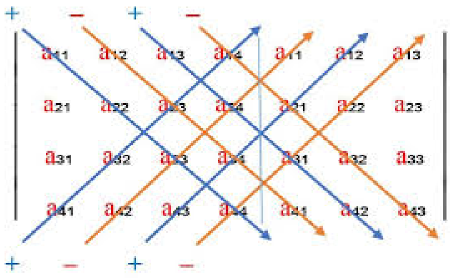
3 Οι Ορίζουσες (Determinants) και οι ιδιότητες τους.

Οι ιδιότητες των οριζουσών :

Εστω ενας τετραγωνικος πίνακας A.

1. $det(A) \neq 0$ αν κα μονο εάν ο A αντιστρέφεται.
2. $det(A) = det(A^{\top})$
3. $det(I_n) = 1$ οπου I_n ο μοναδιαίος πίνακας.
4. $det(AB) = det(A)det(B)$
5. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
6. $det(A^k) = (det(A))^k$
7. Εάν μια γραμμη (στηλη) του πίνακα πολλαπλασιαστεί με κ τότε η ορίζουσα του νεου πίνακα είναι $kdet(A)$
8. Εάν ο πίνακας είναι διαγώνιος ή τριγωνικός, η ορίζουσα είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.
9. Εάν μια γραμμη (στηλη) του πίνακα είναι μηδενική τοτε $det(A) = 0$
10. Εάν οι γραμμες (στηλες) είναι γραμμικα εξαρτημένες τοτε $det(A) = 0$.

Ο κανόνας του Sarrus για 3 × 3 ορίζουσες:



Σχήμα 2: Ο κανόνας του Sarrus

3.1 Ασκήσεις

1. Να απαντήσετε εαν οι παρακάτω προτάσεις ειναι σωστές η Λάθος, δικαιολογόντας την απάντηση σας.

1. Εστω A ενας 3×3 πίνακας. Τοτε $det(5A) = 5det(A)$. **Λάθος**: $5^3det(A)$
2. Εστω ενας $n \times n$ πίνακας A. Τοτε $det(-A) = -det(A)$. **Λάθος**: $(-1)^n det(A)$
3. Εστω ενας $n \times n$ πίνακας A. Εαν $A^3 = 0$ τότε $det(A) = 0$. **Σωστό**
4. Εστω ενας $n \times n$ πίνακας A. Τοτε $det(AA^T) \geq 0$. **Σωστό**: $det(AA^T) = det(A)det(A^T) = det(A)^2 \geq 0$

2. Να γίνει παραγοντοποίηση QR στον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Απάντηση Με Gram Schmidt, $Q = \begin{bmatrix} \frac{11}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

και μετα, $R = Q^T A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. α) Να βρεθεί η τιμή του x ωστε ο πίνακας να μην αντιστρέφεται $Q = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x + 2 & 1 \end{bmatrix}$

Απάντηση

Πρέπει $det(Q) = 0 \Rightarrow x = ln(2)$

β) α) Να βρεθεί η τιμή του k ωστε ο πίνακας να μην αντιστρέφεται $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & k-1 \\ k & 0 & k-2 \end{bmatrix}$

Απάντηση Πρέπει $det(A) = 0 \Rightarrow k = 0, \frac{7}{3}$

4. ΝΑ γίνει ορθοκανονικοποίηση Gram Schmidt, στα παρακάτω διανύσματα:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Απάντηση

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{9.1}} \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{17}{10} \\ -\frac{13}{10} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix},$$

4 Όμοιοι πίνακες

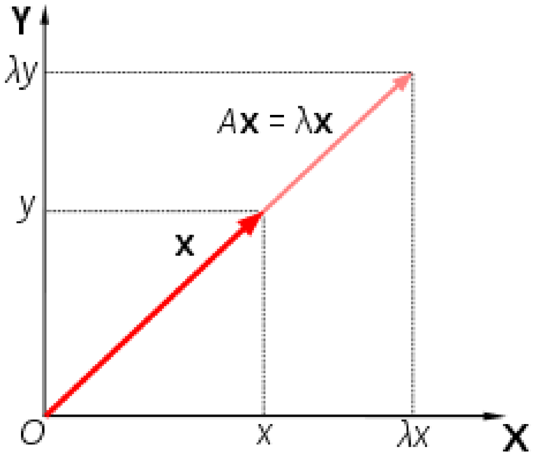
Οι πίνακες A, B είναι όμοιοι εάν αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$A = PBP^{-1}$$

Ιδιότητες:

1. Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές (με ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα). Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή εαν δυο πίνακες έχουν ιδιες ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα όμοιοι.
2. $Det(A) = Det(B)$
3. Οι πίνακες$A^\top, B^\top$ είναι όμοιοι.
4. Trace(A) = trace(B) (αφού $tr(AB) = tr(BA)$)
5. Εαν $A^2 = A$ και A, B όμοιοι ,τότε $B^2 = B$.
6. Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδια κανονική μορφή Jordan
7. Εαν A, B όμοιοι, το ίδιο ισχύει και για τους A^k, B^k , $k \in \mathbb{N}$

5 Ιδιοτιμές -Ιδιοδιανύσματα τετραγωνικών πινάκων και εφαρμογές
Eigenvalues and Eigenvectors



Σχήμα 3: Ιδιοδιάνυσμα.

5.1 Δυναμικά Συστήματα της μορφής $x_{k+1} = Ax_k$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μας δίνουν λύσεις στην κατανόηση της συμπεριφοράς σε βάθος χρόνου (την μακροχρόνια εξέλιξη) ενος διακριτού δυναμικού συστήματος που περιγράφεται απο μια εξίσωση διαφορών της μορφής $x_{k+1} = Ax_k$. Το διάνυσμα x_k μας δίνει πληροφορία για το σύστημα την χρονική στιγμή k. Τέτοιες εξισώσεις χρησιμοποιούνται πχ. για την μοντελοποίηση αυξομοιώσεις πληθυσμών, και τέτοια παραδείγματα θα παρουσιάσουμε σε αυτο το μάθημα, κυρίως γιατι τέτοια μοντέλα είναι ευκολότερο να παρουσιαστούν από αντίστοιχα παραδείγματα φυσικής ή μηχανικής.
Υποθέτουμε οτι ο τετραγωνικός πίνακας $A, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι διαγωνοποιήσημος, επομένως έχει n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \dots v_n$. Ετσι, το αρχικό διάνυσμα x_0 μπορεί να γραφτεί ως

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_n v_n$$

Επομένως, $x_1 = Ax_0 = A(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots c_n v_n) = A\lambda_1 v_1 + A\lambda_2 v_2 + \dots A\lambda_n v_n$ Έτσι, παίρνουμε :

$$x_k = A\lambda_1^k v_1 + A\lambda_2^k v_2 + \dots A\lambda_n^k v_n$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο $lim_{k \to \infty}$ έχουμε την συμπεριφορά του συστήματος σε βάθος χρόνου. Οι ιδιοτιμές είναι που καθορίζουν αυτη την συμπεριφορά
Η εξίσωση διαφορών $x_{k+1} = Ax_k$ λέγεται:

- Ευσταθής, οταν όλες οι ιδιοτιμές της λ ικανοποιούν την σχεση $|\lambda_i| < 1$
- Ουδέτερα Ευσταθής, οταν κάποιες ιδιοτιμές της λ ικανοποιούν την σχεση $|\lambda_i| < 1$ και τουλάχιστον μια ικανοποιεί την $|\lambda| = 1$
- Ασταθής, οταν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή της λ ικανοποιεί την σχεση $|\lambda| > 1$

5.1.1 Στοχαστικοί πίνακες

Στοχαστικός πίνακας ονομάζεται ενας τετραγωνικός πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία τα οποία αναπαριστουν πιθανότητες. Οι γραμμές (ή οι στήλες του) έχουν άθροισμα 1. Ονομάζεται και πίνακας μετάβασης.
Εάν οι γραμμές (στήλες) αθροιζουν στην μονάδα, λέγεται δεξιά στοχαστικός (αντίστοιχα αριστερά στοχαστικός) Οι στοχαστικοί πίνακες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Οι ιδιοτιμές του λ είναι μη αρνητικές και έχουν την ιδιότητα $|\lambda_i| \leq 1$
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$. (Η σταθερή κατάσταση).
3. Το γινόμενο 2 στοχαστικών πινάκων είναι στοχαστικός πίνακας. Επομένως, και οι δυνάμεις ενος στοχαστικού πινακα ειναι στοχαστικός πίνακας.

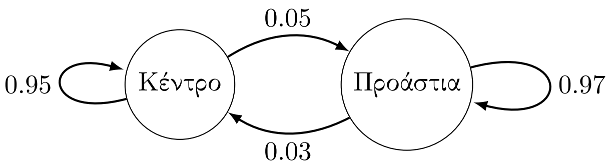
Απο την σχέση $x_k = A\lambda_1^k v_1 + A\lambda_2^k v_2 + \dots A\lambda_n^k v_n$ λοιπόν, βλέπουμε οτι η ιδιοτιμή $\lambda = 1$ ειναι που καθορίζει την συμπεριφορά του συστήματος, καθώς οι υπόλοιπες μηδενίζονται παίρνοντας το όριο του κ στο άπειρο.

Παράδειγμα:
Έστω μια πόλη με πλήθυσμο 1 εκατομύριο κατοίκους. Γνωρίζουμε οτι 600.000 αυτών ζουν στο κέντρο, ενω 400.000 ζούν στα προάστια της συγκεκριμένης πόλης. Επίσης η μετακινήσεις αυτών περιγράφονται απο τον παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{array}{cc} \text{κέντρο} & \text{προάστια} \\ \left[\begin{array}{cc} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{array}\right. & \left.\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{κέντρο} \\ \text{προάστια} \end{array}$$

Ενδιαφερόμαστε για το τι θα συμβεί στον πληθυσμό της πόλης μετά απο πολύ καιρό.

Μπόρει κάνει ευκόλα να παρατηρήσει οτι τα στοιχεία του πίνακα A έχουν μια πόλυ συγκεκριμένη ιδιότητα: οι στήλες του αθροίζουν στη μονάδα. Αυτο δεν είναι τυχαίο, ο παραπάνω πίνακας ανήκει σε μια κατηγορία πινάκων που ονομάζονται *στοχαστικοί πίνακες* (κατα στήλη) ή *πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης*. Σχηματικά, μπορούμε να το αναπαράστήσουμε τον παραπάνω πίνακα ως εξης:



οπου τα στοιχεία του πίνακα περιγράφουν την πίθανοτητα ειτε ο πληθύσμος να μήν αλλάξει την κατάσταση του, είτε να μετάβει απο μία κατάσταση σε μια άλλη. Σημειώνουμε οτι στην περίπτωση μας οι κατάστασεις είναι το κέντρο και τα προάστια της πόλης.

Αξιζει να αναφέρουμε πως όλα τα παραπάνω ορίζουν μια (διακριτή) *άλυσιδα Markov*. Τετοιές αλυσίδες βρίσκουν εφάρμογη σε πόλλες περιοχές των εφαρμόσμένων μαθηματικών και αποτέλουν ακρογωνιαίο λίθο ορισμένων πολύ σημαντικων στατιστικων τεχνικών όπως η MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Ολα αυτα μελετώνται εκτενέστερα σε επόμενα μάθηματα στοχάστικών διαδικάσιων γι' αυτο και δεν θα επέκταθουμε περαιτερω.

Στα πλαίσια της Γράμμικης Άλγεβρας, η εξέλιξη του πλήθυσμού της πόλης περιγράφεται απο την εξίσωση

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{με} \quad \text{αρχικές συνθήκες} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Κατα τα γνώστα, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A προκύπτει οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0.92$$

και

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Τα v_1, v_2 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ αφου είναι δισδιάστατα και γράμμικα ανεξάρτητα αρα έχουμε ότι

$$x_0 = \mu v_1 + w v_2 \Rightarrow x_0 = \mu \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ w \end{bmatrix}$$

Αρα, με λίγη άλγεβρα πίνακων, έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \mu &= 0.125 \\ w &= 0.225 \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει οτι

$$x_0 = 0.125 v_1 + 0.225 v_2$$

Αν βάσει της (1), πολλάπλασιασουμε επι A θα έχουμε οτι

$$x_1 = 0.125 \cdot 1 \cdot v_1 + 0.225 \cdot 0.92 \cdot v_2$$

ενω αντίστοιχα αν πολλαπλάσιασουμε k φορές επι A θα έχουμε

$$x_k = 0.125 \cdot 1^k \cdot v_1 + 0.225 \cdot 0.92^k \cdot v_2$$

Εν τέλει, αν $k \longrightarrow \infty$, ο δεύτερος όρος στο άθροισμα θα μηδενιστεί και έτσι θα προκύψει οτι

$$x_* = 0.125 v_1 = 0.125 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

Οπότε, μετά απο πόλυ καιρό αναμένουμε ότι ο πλήθυσμός της πόλης θα βρέθει σ' αυτήν την κατάσταση.

◁

5.2 Ο εκθετικός πίνακας e^{At}

Έστω Α ένας τετραγωνικός πίνακας. Ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση του πίνακα Α, e^{At}.

Για να υπολογίσουμε αυτη την συνάρτηση διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- Οταν ο Α διαγωνοποιείται:
  Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές λ και τα ιδιοδιανύσματα του, και τον διαγωνοποιούμε, $A = P\Delta P^{-1}$. Τότε, το $e^{\Delta t}$ έχει στην διαγώνιο του τις τιμές $e^{\lambda t}$

  Παράδειγμα: Ο συμμετρικός πίνακας Α = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές -1 και -3.
  Ετσι, παίρνουμε
  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$
  Επομενως, $e^{At} = Pe^{\Delta t}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow$
  $$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

- Οταν ο Α δεν διαγωνοποιείται:
  Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την γνωστή δυναμοσειρά
  $$e^x = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
  Αντικαθιστώντας το x με το Α και την μονάδα με το Ι, το αποτέλεσμα είναι ενας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας:
  $$e^{At} = I_n + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$
  Η σειρά συγκλίνει πάντα, και έχει ιδιότητες:
  $$e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}, \quad e^{At}e^{-At} = I$$
  Η άπειρη αυτη σειρά δίνει λύση για κάθε τιμή του t αλλα υπολογίζεται δύσκολα.

Ο πίνακας e^{At} είναι πάντα αντιστρέψιμος $(e^{At}e^{-At} = I)$.

Η παραπάνω ιδέα, για την περίπτωση των διαγωνοποιήσιμων πινάκων, μπορεί να γενικευτεί και για οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση f που ορίζεται πάνω στις ιδιοτιμές λ του πίνακα Α.
Εστω $A = P\Delta P^{-1}$. Ορίζουμε $f(\Delta) = diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots f(\lambda_n)) \Rightarrow$

$$f(A) = Pf(\Delta)P^{-1} = P \text{ diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots f(\lambda_n))P^{-1}$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε πίνακες!

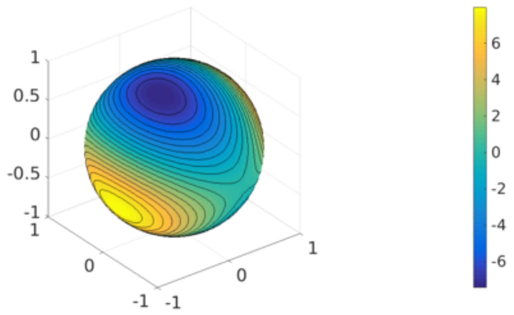
$$sin(A) = A - \frac{(A)^3}{3!} + \frac{(A)^5}{5!} + \dots$$

5.3 Το πηλίκο του Rayleigh

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας A.
Το πηλίκο

$$R(x) = \frac{x^\top A x}{x^\top x}$$

λέγεται Το πηλίκο του Rayleigh.
Αποδεικνύεται οτι η συνάρτηση $R(x)$ ελαχιστοποιείται απο το ιδιοδιάνυσμα που δίνει την μικρότερη ιδιοτιμή, λ_{min} και η ελάχιστη τιμή της είναι $R_{min} = \lambda_{min}$. Αντίστοιχα το μέγιστο της συνάρτησης $R(x)$ δίνεται απο το ιδιοδιάνυσμα που δίνει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή, λ_{max} και η μέγιστη τιμή της είναι $R_{max} = \lambda_{max}$. Τα ενδιάμεσα ιδιοδιανύσματα δίνουν σαγματικά σημεία.
Είναι προφανές οτι εαν το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A, τότε $Ax = \lambda x$ και τότε $R(x) = \lambda$.
Στην εικόνα που ακολουθεί βλέπουμε την μοναδιαία σφαίρα και τις τιμές που παίρνει το πηλίκο στα διάφορα σημεία της σφαίρας.



Σχήμα 4: Το πηλίκο του Rayleigh στην μοναδιαία σφαίρα.

Αυτη η μέθοδος λοιπον μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που ψάχνουμε μια ιδιοτιμή, εαν γνωρίζουμε προσεγγιστικά ενα ιδιοδιάνυσμα.
Το πηλίκο αυτο μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση 2 τετραγωνικών μορφών, παίρνοντας την μορφή:

$$R(x) = \frac{x^\top A x}{x^\top B x}$$

με A, B συμμετρικούς και θετικά ημιορισμένους.

5.4 Ασκήσεις σε ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση, Θεώρημα Cayley- Hamilton

1. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Λυση:
Έχουμε οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -\lambda & 8 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -16 \Rightarrow \lambda = \pm 4i$$

Για $\lambda = 4i$ έχουμε:

$$A\boldsymbol{u} = 4i\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 8y & = & 4xi \\ -2x & = & 4yi \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραπάνω 2 εξισώσεις είναι ταυτόσημες αφού η μια ειναι πολλαπλάσιο της άλλης. Συνεπώς παίρνοντας μονο την πρώτη έχουμε $y = \frac{1}{2}xi$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα ειναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}xi \end{bmatrix} \quad \text{π.χ. το} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4i$ έχουμε:

$$A\boldsymbol{u} = -4i\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 8y & = & -4xi \\ -2x & = & -4yi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & -\frac{1}{2}xi \\ y & = & \frac{x}{2i} \end{array} \right\}$$

οπου με λίγη προσοχή μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι και αυτές οι δυο εξισώσεις είναι ταυτόσημες, κι έτσι παίρνοντας μόνο την πρώτη έχουμε $y = -\frac{1}{2}xi$ και άρα το ιδιοδιάνυσμα ειναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}xi \end{bmatrix} \quad \text{π.χ. το} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$$

◁

2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του.
(β) Διαγωνοποιείται ;
(γ) Αν ναι, να γίνει η διαγωνοποιήση.

Λύση:
(α) Αφαιρώντας λ απο την διαγώνιο του A, παιρνόντας την ορίζουσα και εφαρμόζοντας τον κανόνα του Sarrus έχουμε

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$$

Παρατηρούμε οτι το $\lambda = 2$ είναι ρίζα. Ετσι εφαρμόζοντας το σχήμα Horner έχουμε

1	-7	16	-12	2
▨	2	-10	12	
1	-5	6	0	

Αρα βγάζουμε οτι $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ που έχει ρίζες τις $\lambda = 2$ και $\lambda = 3$. Ετσι εν τέλει, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = 2$ (διπλή) και $\lambda = 3$. Για τα ιδιοδιανυσματα για την $\lambda = 3$ έχουμε

$$A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 4x - 2y + z & = & 3x \\ 2x + z & = & 3y \\ 2x - 2y + 3z & = & 3z \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι ταυτόσημες. Απο την τελευταία προκύπτει οτι $x = y$, όπου αν το αντικαταστήσουμε στην δεύτερη έχουμε $x = z$ και έτσι προκύπτει οτι $x = y = z$. Οπότε το ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \\ \kappa \\ \kappa \end{bmatrix}, \ \kappa \in \mathbb{R}, \ \text{π.χ} \ \ \text{το} \ \ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για την $\lambda = 2$ με την ίδια λογική έχουμε

$$A\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{u} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 4x - 2y + z & = & 2x \\ 2x + z & = & 2y \\ 2x - 2y + 3z & = & 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 2y + z & = & 0 \\ 2x - 2y + z & = & 0 \\ 2x - 2z + z & = & 0 \end{array} \right\}$$

οπου παρατηρούμε οτι και οι 3 εξισώσεις είναι ταυτόσημες. Ετσι δουλευοντας μόνο με μια απο αυτες προκύπτει οτι $z = 2y - 2x$ και αρα το ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 2y - 2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \mu \\ 2\mu - 2\kappa \end{bmatrix}, \ \kappa, \mu \in \mathbb{R}, \ \text{π.χ} \ \ \text{το} \ \ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \ \ \text{ή} \ \ \text{το} \ \ \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(β) Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ίση με την γεωμετρική και ίση με 2, συνέπως ο πινακας είναι απλής δομής και άρα διαγωνοποιείται.
(γ) Για την διαγώνοποιηση γνωρίζουμε οτι $A = P\Delta P^{-1}$, όπου P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων σε στήλες και Δ ο διαγώνιος πίνακας που έχει τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Εχουμε λοιπόν οτι

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

◁

3. Ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις ειναι σώστες; Ποιές λάθος; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.
(α) Αν ο $A_{3\times 3}$ έχει ιδιοτιμες τις $\lambda = 1, 1, 2$, ο A αντιστρέφεται.
(β) Αν ο A έχει ιδιοτιμες τις $\lambda = -1, 1, 2$, ισχυεί οτι $\det(A) = -2$.
(γ) Αν $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -13 & -5 \end{bmatrix}$ τοτε ισχυεί οτι $A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = I$.

Λύση:
(1) Σωστο, αφου $\lambda_i \neq 0$.
(2) Λάθος, αφου δεν γνωρίζουμε την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών. Θα μπορούσε κάποια ιδιοτιμή να εμφανίζεται περισσότερες απο μια φορές.
(3) Για να αποφανθουμε, ας βρούμε τις ιδιοτιμές του A. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ -13 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(-5-\lambda) + 26 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Αρα

$$P_A x = x^2 + 1 \overset{C-H}{\Longrightarrow} A^2 + I = \mathbb{O} \Rightarrow A^2 = -I$$

Ετσι αν αντικαταστήσουμε την τελευταία ισοτητα, σε εκείνη που θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι σωστή ή λάθος έχουμε

$$A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = (A^2)^{1004} + (A^2)^{1003} + (A^2)^{1002} = I - I + I = I.$$

Αρα είναι σωστή.

◁

4. Αν $A^3 = A$, να δείξεται οτι το φάσμα του A είναι $\sigma(A) = \{-1, 1, 0\}$.

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι ισχυεί $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \Rightarrow A^n\boldsymbol{u} = \lambda^n\boldsymbol{u}$. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A\boldsymbol{u} & = & \lambda\boldsymbol{u} \\ A^n\boldsymbol{u} & = & \lambda^n\boldsymbol{u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda\boldsymbol{u} & = & \lambda^3\boldsymbol{u} \\ (\lambda - \lambda^3)\boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$

$$\overset{\boldsymbol{u}\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda(1 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1, \quad \lambda = 0$$

Αρα $\sigma(A) = \{-1, 1, 0\}$.

◁

5. Έστω ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε τον A^{20}.
Λυση:
Αρχικά θα διαγωνόποιησουμε τον A. Ας βρούμε λοιπόν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του. Εχουμε ότι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \text{Sarrus} \quad \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = 1.\lambda = 4$$

Παρατηρούμε οτι κάποια ιδιοτιμή είναι μηδενική αρα καταλαβαίνουμε οτι ο A δεν αντιστρεφεται, πράγμα που περιμέναμε βλέποντας οτι 2 στήλες του είναι συγγραμικές αυτό όμως είναι κάτι που δεν μας επηρεάζει στην διαγωνοποιήση. Ας βρούμε όμως τα ιδιοδιανύσματα.
Για $\lambda = 0$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u} \Rightarrow A\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 1$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} \Rightarrow A\boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 4$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{w} = 4\boldsymbol{w} \Rightarrow A\boldsymbol{w} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Οπότε αφού ισχυεί οτι $A = P\Delta P^{-1}$ για $k, z, \mu = 1$ προκύπτει οτι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Γνωρίζουμε οτι ισχυει $A^n = P\Delta^n P^{-1}$ και ετσι τώρα μπορουμε να υπολογίσουμε εύκολα τον A^{20} υψώνοντας τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα Δ στην συγκεκριμένη δύναμη.

◁

6. Έστω

$$F(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x2$$

Να βρέθει η κανονική μορφη.

Λύση:

Αρχικά, ας σχηματίσουμε τον πίνακα της παραπάνω συνάρτησης. Έχουμε λοιπόν οτι

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Παράλληλα, ας βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανυσματα του παραπάνω πίνακα

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ Sarrus } \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 3, \lambda = 6, \lambda = 9$$

Για $\lambda = 3$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2k \\ 2k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 6$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} z \\ -2z \\ -2z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$$

Για $\lambda = 9$ εχουμε οτι

$$A\boldsymbol{w} = 9\boldsymbol{w} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2\mu \\ -\mu \\ 2\mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

Εστω $k, z, \mu = 1$, έτσι προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Κανονικοποιώντας τα, προκύπτει οτι

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

Οπότε έχουμε οτι

$$Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Θυμομαστε οτι $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, έτσι θέτωντας $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ οπου $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, προκύπτει η παρακάτω κανονική μορφή:

$$f(\boldsymbol{y}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$$

◁

7. Να βρέθει ο πίνακας 2×2 με ιδιοτιμες $1, 4$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Λύση:

Τα $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ όπως παρατηρούμε είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα ο ζητούμενος πίνακας διαγωνοποιείται. Οποτε έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Δεδομένου οτι ο πίνακας P είναι 2×2, μπορούμε εύκολα να βρούμε τον αντίστροφο του. Εχουμε

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Αρα ο ζητούμενος πίνακας θα είναι

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

◁

8. Εστω ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Να βρείτε την τιμή του $A^{100} + A^{81} - 2I$.

Λύση:

Ας βρούμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \Big(\frac{1}{2} - \lambda\Big)\Big(-\frac{1}{2} - \lambda\Big) + \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1$$

Ετσι απο το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε οτι $A^2 - I = \mathbb{O}$. Διαιρώντας το ζητούμενο πολυώνυμο με έκεινο που προκύπτει απ το θεώρημα C-H και εκμεταλλευόμενοι την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης προκύπτει οτι $x^{100} + x^{81} - 2 = (x^2 - 1)p(x) + ax + b$ οπου $p(x)$ το πηλίκο και $ax + b$ το υπόλοιπο. Και έτσι έχουμε:

$$A^{100} + A^{81} - 2I = (A^2 - I)p(A) + A - I = A - I$$

◁

9. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Να βρέθούν οι A^{100}, A^{-1} και το $A^4 + A^3 - A^2 + A + I$.

Λύση:
Για τον A^{100} ας διαγώνοποίησουμε τον πίνακα. Κατα την σύνηθη διαδικάσια θα πρέπει να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα. Έχουμε λοιπόν για τις ιδιοτιμές οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 5$$

Για τα ιδιοδιάνυσματα έχουμε:
- για $\lambda = 1$,

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \text{ π.χ. } \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- για $\lambda = 5$,

$$A\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x \\ 5y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \mu \\ 3\mu \end{bmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \text{ π.χ. } \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι ο πίνακας A μπόρει να γράφει ως

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

Έτσι, για τον A^{100} το μόνο πού έχουμε να κάνουμε είναι να υψώσουμε στην 100-στη δύναμη τα στόιχεια του Δ, δηλάδη

$$A^{100} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Για τον A^{-1}, ας θυμηθούμε το θεώρημα Cayley- Hamilton. Πιο συγκεκριμένα, βάσει του C-H ο πίνακας A " μηδένιζει " το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, δηλάδη

$$A^2 - 6A + 5I = \mathbb{O} \tag{2}$$

Με λίγη άλγεβρα μπόρουμε να δούμε οτι

$$\begin{aligned} A^2 - 6A + 5I &= \mathbb{O} \\ A^2 - 6A &= -5I \\ A(A - 6I) &= -5I \\ A\Big(-\frac{1}{5}A + \frac{6}{5}I\Big) &= I \\ \text{Άρα } \ A^{-1} &= -\frac{1}{5}A + \frac{6}{5}I \end{aligned}$$

Για να υπόλογισουμε την ποσότητα $A^4 + A^3 - A^2 + A + I$, αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να την διαιρέσουμε με το χαρακτηριστικό πολύωνυμο. Κανόντας αυτήν την διαίρεση πολύωνυμων και απο την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης προκύπτει ότι

$$A^4 + A^3 - A^2 + A + I = (A^2 + 6A - 5I)(A^2 + 7A + 36I) + 182A + 179I$$

Όμως απο το θεώρημα Cayley-Hamilton γνώριζουμε οτι $A^2 + 6A - 5I = \mathbb{O}$, αρα

$$A^4 + A^3 - A^2 + A + I = 182A + 179I$$

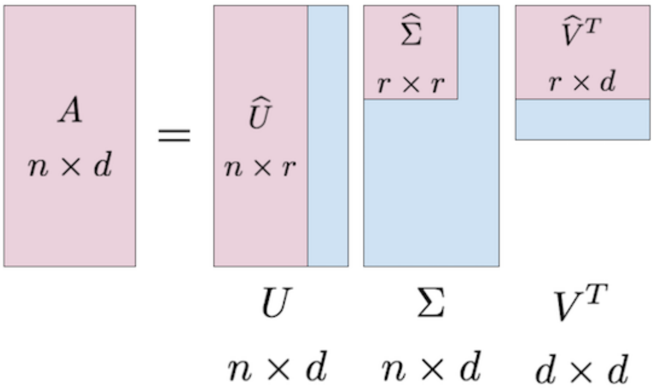
◁

6 Η διάσπαση ιδιόμορφων τιμών, The Singular Value Decomposition (SVD)

Εστω ενας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με τάξη $rank(A) = k$.
Η SVD είναι μια μορφη διαγωνοποίησης που μπορει να εφαρμοστεί σε καθε πινακα, τετραγωνικο η μη. Μπορεί κανείς να πει οτι είναι κατι κοντινό στην παραγοντοποίηση συμμετρικών πινάκων (Το Φασματικό Θεώρημα), οπου έχουμε $A = Q\Delta Q^\top, \quad Q$ είναι ορθογώνιος πίνακας.
Αυτη η παραγοντοποίηση είναι της μορφής

$$A = U\Sigma V^\top, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}, \Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Οι πίνακες U, V είναι ορθογώνιοι, και οχι μοναδικά ορισμένοι. Ο πίνακας Σ είναι «διαγώνιος» της μορφής $\begin{bmatrix} \Delta_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ όπου Δ ενας διαγώνιος πίνακας με τις ιδιόμορφες τιμές σ_i στην διαγώνιο του, οι οποίες είναι οι ρίζες των ιδιοτιμών λ_i του πίνακα $AA^\top$, διατεταγμένες απο την μεγαλύτερη προς την μικρότερη. Δηλαδή ισχύει $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.



Σχήμα 5: Η SVD σχηματικά.

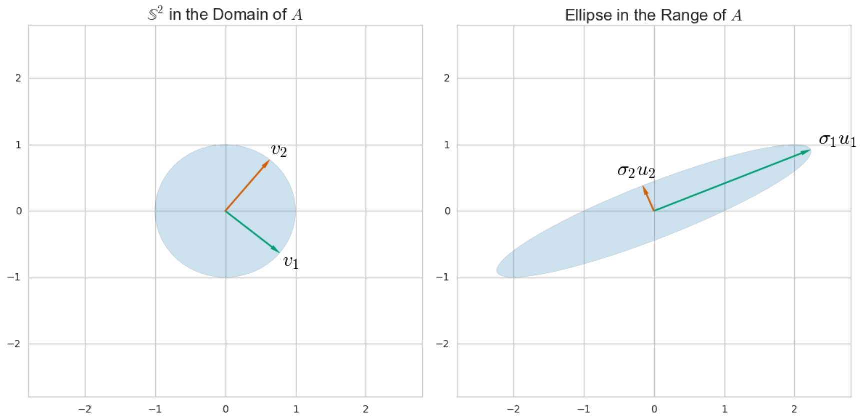
Οι πίνακες $AA^\top$ και $A^\top A$ έχουν ιδιες ιδιοτιμες, θετικες η μηδεν.(πιθανον οχι με την ιδια πολλαπλότητα) Ο πίνακας U έχει για στηλες τα ιδιοδιανύσματα του $AA^\top$, κανονικοποιημένα και ορθογώνια μεταξύ τους (εαν χρειαστεί κάνουμε ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt στην περίπτωση ιδιοδιανυσμάτων που προέρχονται απο τη ιδια ιδιοτιμή.)

Ιδιότητες:

1. Οι πρώτες k στήλες του πίνακα U αποτελούν μια βάση του $R(A)$
2. Οι επόμενες $m - k$ στήλες του πίνακα U αποτελούν μια βάση του $N(A^\top)$
3. Οι πρώτες k στήλες του πίνακα V αποτελούν μια βάση του $R(A^\top)$
4. Οι επόμενες $n - k$ στήλες του πίνακα V αποτελούν μια βάση του $N(A)$

Στην παρακάτω εικόνα βλέπουμε την δράση ενος πίνακα στην μοναδιαία σφαίρα, που μετατρέπει την σφαίρα σε έλλειψη με μεγάλο και μικρό άξονα τις ιδιάζουσες τιμές του. Τα u_1, u_2 είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (οι στήλες του U).

Η SVD είναι απο τις πιο σημαντικές παραγοντοποιήσεις πινάκων λογω της σταθερότητας του αλγορίθμου. Υπολογιστικά, ειναι πολύ ακριβής λόγω του γεγονότος οτι οι πίνακες U, V είναι ορθογώνιοι.
Μερικές απο τις εφαρμογές της είναι data compression, groupings in data, noise reduction.



Σχήμα 6: Η δράση ενος πίνακα στην μοναδιαία σφαίρα και η SVD

Παράδειγμα:
Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Να γίνει η διάσπαση ιδιόμορφων τιμών (SVD).
Λύση:

Έχουμε οτι

$$AA^\top = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές $\lambda_1 = 25$ και $\lambda_2 = 9$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα οπόια διαιρώντας τα με την νόρμα τους γίνονται

$$\hat{\boldsymbol{u_1}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{u_2}} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ετσι ο πίνακας U της διάσπασης είναι

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ευκολα μπορούμε να καταλάβουμε οτι ο πίνακας με τις ιδιόμορφες τιμές είναι ο

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, ας βρούμε τον πίνακα V της διάσπασης. Έχουμε ότι

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 0$ και αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα τα

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad mbox \quad kai \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

τα οποία κανονικοποιώντας τα παιρνούμε τις στήλες του V. Εν τέλει λοιπόν καταλήγουμε στην εξής διάσπαση ιδιάζουσων τιμών:

$$A = U\Sigma V^\top \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & -4/\sqrt{18} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

◁

7 Τετραγωνική ρίζα πίνακα - Πολική Ανάλυση

7.1 Τετραγωνική ρίζα πίνακα

Να βρέθει η τετραγωνική ρίζα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:

Βρισκόντας τις ιδιοτιμές του πίνακα A (είτε με το χέρι ειτε με κάποιο μαθηματικό πακέτο) καταλήγουμε στο ότι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$ και με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ετσι κατα τα συνήθη έχουμε οτι

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ετσι υψώνουμε τον A στην $1/2$ υψώνοντας ουσιαστικά τα στοιχεια του Δ και έχουμε οτι

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1}$$

οπου θα έχουμε 4 λύσεις για την ρίζα, πραγμα λόγικα αφου οπως θυμόμαστε η τετραγώνικη ρίζα του πίνακα δεν ειίναι μοναδικά ορισμένη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε οτι

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{και} \quad A^{1/2} = P \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{και} \quad A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1}$$

◁

Για την τετραγωνική ρίζα πίνακα, οπώς την υπολογισαμε στην προηγουμενη ασκηση απαιτουσαμε ολες οι ιδιοτιμες του εν λόγω πίνακα να ειναι μη αρνητικες, λογω του οτι θέλαμε να τις βάλουμε σε τετραγώνικη ρίζα αφοτου κάνουμε την διαγώνοποιηση. Μια τέτοια συνθήκη όμως σε πολλές περιπτώσεις οπου ενδέχομενως να χρειαζόμαστε μια τετραγώνικη ρίζα κάποιου πίνακα να μην είναι αληθης. Επιγράμματικα, αναφέρουμε οτι για τους τετραγωνικούς και αντιστρεψιμους πίνακες μπορούμε να την παρακάμψουμε και άρα να υπολογίσουμε τέτραγωνικές ρίζες τέτοιων πινάκων ακομα και με με αρνητικές ιδιοτιμές.

Θέτουμε $T = A^\top A$ οποιος οπως ευκολα καταλαβαίνουμε είναι θετικά ορισμενος
(Απο SVD : $A^\top A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$), και οριζουμε τον

$$|A| := T^{\frac{1}{2}}$$

απο το οποιο προκύπτει οτι $|A|^2 = A^\top A$.

7.2 Πολική Ανάλυση πίνακα
The Polar Decomposition

Εκτος απο τις γνωστές παραγοντοποιήσεις που έχουμε δεί ως τωρα, υπαρχει και η *πολικη ανάλυση πινάκων*, συμφωνα με την οποια έχουμε οτι μπορουμε να παραγοντοποιησουμε ένα πίνακα ως

$$A = Q|A|$$

οπου ο πίνακας $Q = (A^\top)^{-1}|A|$ είναι ορθογώνιος. Αυτο φαίνεται σχετικά ευκολα με λίγη αλγεβρα πινάκων:

$$\begin{aligned} Q^\top Q &= |A|^\top A^{-1}(A^\top)^{-1}|A| \\ &= |A|^\top (A^\top A)^{-1}|A| \\ &= |A|^\top |A|^{-2}|A| \\ &= |A|^\top |A^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

αφου ο $|A|$ είναι συμμετρικός.

Με λίγη φαντασία, μπορεί κανείς να διαπιστώσει οτι η πολικη παραγοντοποίηση $A = Q|A|$ θυμίζει (και έχει) παρόμοια λογικη με την αναπαράσταση των μιγάδικων αριθμων, $z = |z|e^{i\theta}$, αν $|\cdot|$ το μέτρο ενος μιγάδικου αριθμού, i η φαντάστικη μονάδα και θ η γώνια του. Τελος, σχετικα με την ρίζα αναφέρουμε οτι εκτός απο Q τετοιος ώστε $A = Q|A|$ υπάρχει και πίνακας U τέτοιος ώστε $A = |A|U$.

8 Ο πίνακας Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης.

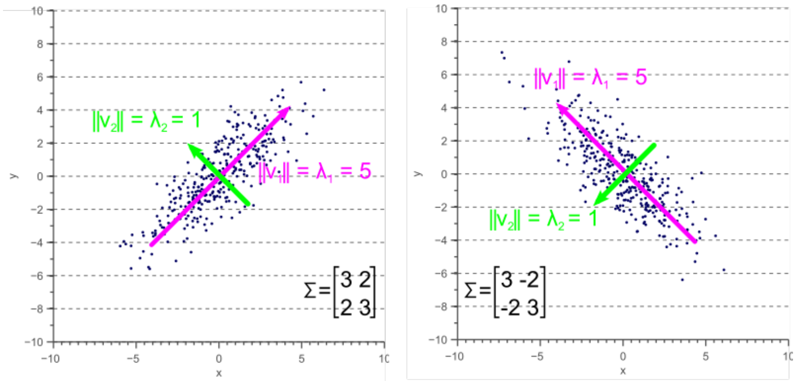
Εστω 2 τυχαίες μεταβλητές, X, Y. Τότε ο πίνακας Σ είναι ο 2 επι 2 συμμετρικός κ θετικά ημιορισμένος πίνακας:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

Προφανώς τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για n το πλήθος τυχαίες μεταβλητές, οπου ο πίνακας Σ θα έχει διάσταση $n \times n$. Πχ:

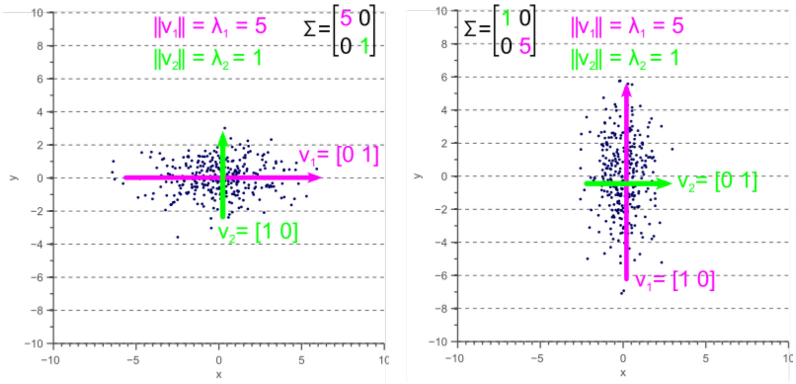
$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) & Cov(X,Z) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) & Cov(Y,Z) \\ Cov(X,Z) & Cov(Y,Z) & Var(Z) \end{bmatrix}$$

Εφόσον ο Σ είναι συμμετρικός διαγωνοποιείται (φασματικό θεώρημα) και έχει κάθετα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα. Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα, η συνδιακύμανση εχει να κάνει με την διαγώνια διασπορά των δεδομένων και είναι ενας δείκτης γραμμικής εξάρτησης των δυο τυχαιων μεταβλητών.



Σχήμα 7: Θετική και αρνητική συνδιακύμανση δεδομένων

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε δεδομένα των οποίως ο Σ έχει ίδιες ιδιοτιμές αλλα ανεξάρτητα μεταξύ τους, επομένως η διασπορά είναι στην κατεύθυνση των αξόνων μονο.



Σχήμα 8: Θετική και αρνητική συνδιακύμανση δεδομένων

8.1 Ασκήσεις στον Πίνακα Διακύμανσης - Συνδιακύμανσης

1. Έστω 2 τυχαίες μετάβλητες που δίνονται απο τον παρακάτω πίνακα.

		X		
		4	5	
Y	3	0.1	0.3	0.4
	7	0.4	0.2	0.6
		0.5	0.5	1

Να βρέθει ο πίνακας συνδιάκυμανσης (Variance- covariance matrix) Σ.

Λύση:

Έχουμε οτι

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2 \quad \text{και} \quad Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2$$

Απο τον πίνακα που μας δόθηκε προκύπτει οτι για την X έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = 4 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.5 = 4.5 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X^2) = 4^2 \cdot 0.5 + 5^2 \cdot 0.5 = 20.5$$

Αρα $Var(X) = 20.5 - 4.5^2 = 0.25$. Ομοια για την Y έχουμε

$$\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.6 = 5.4 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(Y^2) = 3^2 \cdot 0.4 + 7^2 \cdot 0.6 = 33$$

Αρα $Var(Y) = 33 - 5.4^2 = 3.84$. Για την συνδιάκυμανση των 2 τυχαίων μετάβλητων γνώριζουμε οτι

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

οπότε για να την υπολογίσουμε θα πρέπει να βρούμε την τιμή της ποσότητας $\mathbb{E}(XY)$. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\mathbb{E}(XY) = 4 \cdot 3 \cdot 0.1 + 5 \cdot 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 7 \cdot 0.4 + 5 \cdot 7 \cdot 0.2 = 23.9$$

Αρα εν τέλει $Cov(X, Y) = 23.9 - 4.5 \cdot 5.4 = -0.4$. Ετσι ο πίνακας συνδίανυμανσης θα είναι

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.4 \\ -0.4 & 3.84 \end{bmatrix}$$

◁

2. Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα.

Βάρος (lb)	120	125	125	135	145
Ύψος (inch)	61	60	64	68	72

Να βρεθεί ο πίνακας διακυμανσης - συνδιακύμανσης.

Λυση:

Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρώντας τον μέσο απο κάθε x_i έχουμε

$$\hat{x_1} = x_1 - M = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \hat{x_2} = x_2 - M = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x_3} = x_3 - M = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x_4} = x_4 - M = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{x_5} = x_5 - M = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix},$$

Αρα τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -5 & 5 & 15 \\ -4 & -5 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} BB^\top = \begin{bmatrix} 100 & 47.5 \\ 47.5 & 25 \end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι η συνόλικη διακύμανση είναι ίση με 125. Αρα η μετάβλητη βάρος έχουμε οτι περιγράφει το $\frac{100}{125}\%$ της πληροφορίας που υπάρχει στα δεδομένα ενω η μετάβλητη υψος περιγράφει το $\frac{25}{125}\%$.

9 Principal Component Analysis (PCA) Η Ανάλυση κύριων συνιστωσών.

Η PCA είναι μια μεϑοδος ανάλυσης πολυμεταβλητων δεδομένων. Βασίζεται στην μελετη των ιδιοτιμών κ των ιδιοδιανυσματων του πίνακα διακύμανσης/συνδιακύμανσης.

Α) Προετοιμασία:

Ξεκινώντας, έχουμε τον $k \times N$ πίνακα με τα N δεδομένα (σε στήλες). Υπολογίζουμε πρώτα το διάνυσμα $k \times 1$ του μέσου όρου M και το αφαιρούμε απο καϑε στήλη, και έτσι παίρνουμε ενα νεο πίνακα (τον $B, \quad k \times N$) στον οποίο τα δεδομένα έχουν μεση τιμή 0. (mean- deviation form)

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα διακύμανσης/συνδιακύμανσης Σ.

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} BB^\top$$

Στη διαγώνιο είναι η διακύμανση την δεδομένων κ έτσι το άϑροισμα των διαγώνιων στοιχείων (ιχνος του Σ, $tr(\Sigma)$) μας δίνει την ολική διακύμανση (total variance)

Β) PCA:

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές κ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (Κανονικοποιημένα) του Σ. Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή είναι ο πρώτος παράγοντας, ο πιο σημαντικός. Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μας δίνει το πρώτο principal component κλπ. Το πρώτο κύριο συστατικό (principal component) διατηρεί περισσότερες πληροφορίες δεδομένων σε σύγκρίση με το δεύτερο το οποίο δεν διατηρεί πληροφορίες οι οποίες έχουν εισέλϑει νωρίτερα (στο πρώτο συστατικό). Τα principal components δεν συσχετίζονται. Αυτα μπαίνουν σε στήλες και παίρνουμε τον πίνακα P.

Θέτουμε $U = P^\top Q$, και τα νέα δεδομένα U είναι ασυσχέτιστα, οποτε ο νέος πίνακας συνδιακύμανσης που ϑα προκύψει, ας τον πούμε Σ_2, ϑα είναι διαγώνιος.

9.1 Παράδειγμα

Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα.

Βάρος (lb)	120	125	125	135	145
Υψος (inch)	61	60	64	68	72

Να γίνει η ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA).

Λυση:

Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130 \\ 65 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρώντας τον μέσο απο κάϑε x_i έχουμε

$$\hat{x_1} = x_1 - M = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \hat{x_2} = x_2 - M = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x_3} = x_3 - M = \begin{bmatrix}-5\\-1\end{bmatrix}, \quad \hat{x_4} = x_4 - M = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}, \quad \hat{x_5} = x_5 - M = \begin{bmatrix}15\\7\end{bmatrix},$$

Αρα τα δεδομένα μας γίνονται ως εξής

$$B = \begin{bmatrix}10 & -5 & -5 & 5 & 15\\ -4 & -5 & -1 & 3 & 7\end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1}BB^{\top} = \begin{bmatrix}100 & 47.5\\ 47.5 & 25\end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι η συνόλικη διακύμανση είναι ίση με 125. Αρα η μετάβλητη βάρος έχουμε οτι περιγράφει το $\frac{100}{125}\%$ της πληροφορίας που υπάρχει στα δεδομένα ενω η μετάβλητη υψος περιγράφει το $\frac{25}{125}\%$.
Ας αρχίσουμε τώρα την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ. Εχουμε ότι

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = 123, \lambda_2 = 2$$

Ετσι προκύπτει οτι η μετάβλητη βάρος έχει την μεγαλύτερη ιδιοτιμή ($\lambda_1 = 123$) και αρα είναι η μεγαλύτερη συνιστώσα. Το αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα της προκύπτει οτι είναι το $u_1 = [0.9 \;\; 0.436]^{\top}$. Αξίζει να σημειώσουμε οτι η συνόλικη διακύμανση δεν έχει μεταβληθεί ($\lambda_1 + \lambda_2 = 125$).
Ενδεικτικά αναφέρουμε οτι ένας δείκτης που θα λάμβανε υπόψιν του το βάρος και το υψός που έχουμε διαθέσιμα μέσω αυτού του δείγματος είναι ο

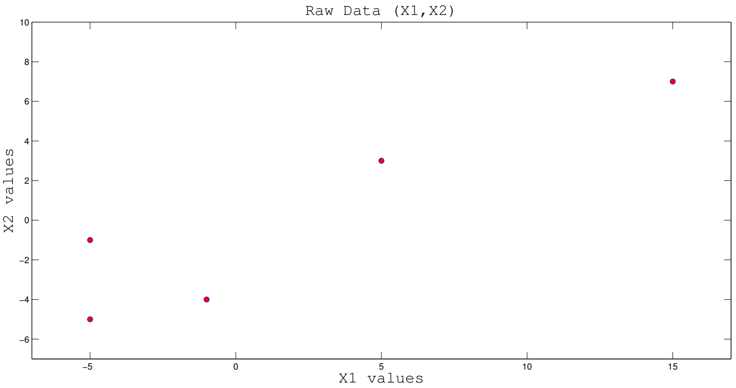
$$y = 0.9x_1 + 0.436x_2$$

Ο νέος πίνακας διακύμανσης θα είναι

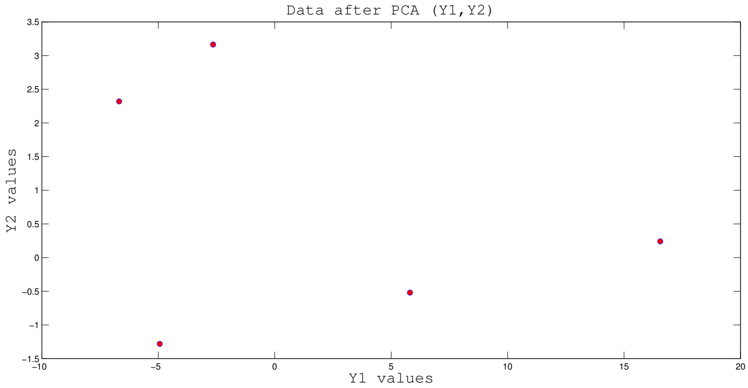
$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix}123 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

Ετσι τώρα διαπιστώνουμε οτι τελικώς, μέτα απο την ανάλυση κυρίων συνιστωσών, η πρώτη συνιστώσα έχει το $\frac{123}{125} = 98.4$ % της πληρόφοριας ένω η δευτερη συνιστώσα έχει το $\frac{2}{125} = 1.6$ % της πληρόφοριας. Σημειώνουμε επίσης οτι μέτα την ανάλυση κυρίων συνιστωσών, ο νεός πινακας διακυμάνσεων δεν περιέχει συνδιακυμάνσεις, αρα οι μετάβλητες μας έγιναν ασυσχέτιστες. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον ορθογώνιο πίνακα P που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του Σ σε στήλες, θέτουμε $X = PY \Rightarrow Y = P^T X$ και παίρνουμε τα νέα δεδομένα Y, τα οποία οπως ειπαμε ειναι ασυσχέτιστα. Τα παραπάνω φαίνονται στις εικόνες που ακολουθούν:

Σχήμα 9: Τα δεδομένα πριν την Ανάλυση κύριων συνιστωσών



Φαίνεται καθαρά οτι τα δεδομένα έχουν χωριστεί σε δυο ομάδες που βρίσκονται πάνω σε δυο ευθείες.



Σχήμα 10: Τα δεδομένα μετα την Ανάλυση κύριων συνιστωσών

19	22	6	3	2	20
12	6	9	15	13	5

9.2 Ασκήσεις στην *PCA*

1. Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα.
Να γίνει η ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA).

Λυση:
Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sum x_i\\ \sum y_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\10\end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρούμε τον μέσο απο κάθε x_i.
Αρα τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix}7 & 10 & -6 & -9 & -10 & 8\\ 2 & -4 & -1 & 5 & 3 & -5\end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1}BB^\top = \begin{bmatrix}86 & -27\\ -27 & 16\end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι η συνόλικη διακύμανση είναι ίση με 102.
Ας αρχίσουμε τώρα την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ.
Εχουμε ότι

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = 95.2, \lambda_2 = 6.8$$

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ($\lambda_1 = 95.2$) είναι η μεγαλύτερη συνιστώσα. Το αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα της προκύπτει οτι είναι το $u_1 = [0.946, \quad -0.322]^\top$. Αξίζει να σημειώσουμε οτι η συνόλικη διακύμανση δεν έχει μεταβληθεί ($\lambda_1 + \lambda_2 = 102$).
Ενδείκτικα, αναφέρουμε οτι ένας δείκτης που θα λάμβανε υπόψιν τα δεδομένα θα είναι ο

$$y = 0.946x_1 - 0.322x_2$$

10 Ο ψευδοαντίστροφος πίνακας Moore - Penrose, $A^\dagger$

Ένα συχνό εργαλείο σε πολλές εφαρμογές της Γραμμικής Άλγεβρας είναι ο Ψευδοαντίστροφος (ή Γενικευμένος Αντίστροφος) πίνακας. Αυτός ορίζεται οταν ο πίνακας είναι μη ανιστρέψιμος (για τετραγωνικούς πίνακες), η όταν ο πίνακας ειναι μη τετραγωνικός. Ονομάζεται και Moore-Penrose inverse. Οι γενικευμένοι αντίστροφοι μη αντιστρέψιμων πινάκων εκτείνονται σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, όπως στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, στα ηλεκτρικά κυκλώματα, στην ελαχιστοποίηση τετραγωνικών μορφών εφαρμοσμένων σε κυκλώματα. Επίσης χρησιμοποιούνται στην στατιστική, και πιο συγκεκριμένα στην θεωρία γραμμικής εκτίμησης και στον γραμμικό προγραμματισμό.
Έστω η γραμμική εξίσωση $Ax = b$. Εαν $b \in \mathcal{R}(A)$, τότε η εξίσωση έχει λύση. Εαν ομως $b \notin \mathcal{R}(A)$ προφανώς η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση. Αντί λοιπόν να αναζητούμε ένα x που να μηδενίζει την παράσταση $Ax - b$ αναζητούμε ένα x που να ελαχιστοποιεί την παράσταση $\|Ax - b\|$. Προφανώς αυτό το x εξαρτάται από την επιλογή της νόρμας. Η επιλογή της ευκλείδειας νόρμας μας οδηγεί στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
Για να βρούμε λοιπόν μια προσεγγιστική λύση της εξίσωση $Ax = b$ θεωρούμε την εξίσωση $Ax = P_A b$ (ο P_A είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής στο σύνολο τιμών του A, $R(A)$.) Κάθε λύση της εξίσωσης αυτής ονομάζεται γενικευμένη λύση (generalized solution) της εξίσωσης $Ax = b$.

Θεώρημα 4 *Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για κάποιο διάνυσμα $u \in R^n$:*

- $Au = P_A b$
- $\|Au - b\| \leq \|Ax - b\|$
- *Για κάθε άλλο $x \in R^n, A^\top Au = A^\top b$*

Ορισμός 2 *Κάθε διάνυσμα u που ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος θα ονομάζεται λύση ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης $Ax = b$. Το σύνολο των λύσεων αυτών μπορεί να γραφτεί και ως εξής : $L = \{u \in R^n : A^\top Au = A^\top b\}$ (Η κανονική εξίσωση) και αποδεικνύεται ότι είναι κλειστό και κυρτό. Επομένως έχει ένα μοναδικό στοιχείο με ελάχιστη νόρμα.*

Ορισμός 3 *Εστω A ένας πινακας, τετραγωνικος η μη. Η απεικόνιση $A^\dagger : A^\dagger b = u$ όπου u είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων με την ελάχιστη νόρμα της εξίσωσης $Ax = b$ λέγεται γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα A.*

Στην γενική περίπτωση που ο A ειναι ενας $m \times n$ πίνακας, τάξης r, ο Roger Penrose έδειξε οτι υπάρχει ενας μοναδικός πίνακας που ονομάστηκε Ψευδοαντίστροφος του A και συμβολίζεται με $A^\dagger$ που ικανοποιεί τις 4 παρακάτω σχέσεις:

$$A = AA^\dagger A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad AA^\dagger = (AA^\dagger)^\top, \quad A^\dagger A = (A^\dagger A)^\top \tag{3}$$

όπου $A^\top$ ο ανάστροφος πίνακας.
Ο E.H. Moore (1862- 1932) έδωσε πρώτος έναν ορισμό για τον γενικευμένο αντίστροφο ενός πίνακα σε μία ομιλία του το 1920. Όμως, εξαιτίας του εντελώς προσωπικού τρόπου που έγραφε και του συμβολισμού που χρησιμοποιούσε, το θέμα ξεχάστηκε για δεκαετίες. Το 1955, ο Penrose γενίκευσε τα αποτελέσματα αυτά, και έδειξε πως ο αντίστροφος του Moore είναι ο μοναδικός πίνακας που ικανοποιεί τις 4 ιδιότητες που είδαμε παραπάνω.

Εύκολα βλέπει κανεις οτι ο $AA^\dagger$ είναι ο πίνακας ορθογώνιας προβολής που μάθαμε στην αρχή του εξαμήνου, απο το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathcal{R}(A)$, και συμβολίζεται με P_A, και οτι ο $A^\dagger A$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^m$ στο $\mathcal{R}(A^\top)$ και συμβολίζεται με $P_{A^\top}$. Επίσης, το σύνολο τιμών του $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^\top)$.
Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε $A^{-1} = A^\dagger$.
Ο ψευδοαντίστροφος λοιπόν μας δίνει μια προσεγγιστική λύση στο αρχικό πρόβλημα, την λύση ελαχίστων τετραγώνων ελάχιστης νόρμας (ΛΕΤ):

$$Ax = b \Rightarrow \hat{x} = A^\dagger b$$

Εαν ϑελήσουμε ολο το σύνολο των γενικευμένων λύσεων και οχι μονο την λύση ελάχιστης νόρμας (ΛΕΤ) τότε αυτές δίνονται απο τον τύπο:

$$Ax = b \Rightarrow \breve{x} = A^{\dagger}b + (I - A^{\dagger}A)u, \quad u \in \mathbb{R}^n$$

Ενας απο τους τρόπους υπολογισμού του είναι μέσω της διάσπασης ιδιόμορφων τιμών, SVD : Αποδεικνύεται οτι

$$A = U\Sigma V^{\top} \Rightarrow A^{\dagger} = V\Sigma^{-1}U^{\top}$$

Εαν ο πίνακας Σ δεν αντιστρέφεται, η είναι μη τετραγωνικός, τοτε ως Σ^{-1} ϑεωρούμε τον ¨διαγώνιο’ πίνακα με στοιχεία τα αντίστροφα της διαγωνίου του πίνακα Σ.

Πρόταση:
Εαν ο πίνακας P είναι πίνακας προβολής, τοτε $P^{\dagger} = P$

Σχετική βιβλιογραφία είναι για παράδειγμα το βιβλίο [4].

Για να επαληϑεύσουμε λοιπον οτι κάποιος πίνακας εινai ο ψευδοαντίστροφος κάπου πίνακα A, αρκεί να ικανοποιεί τις 4 παραπάνω συνϑήκες.

Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε οτι ο ψευδοαντίστροφος του είναι ο

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Λυση:

Αρκεί να αποδείξουμε οτι ισχύουν οι 4 ιδιότητες του ορισμού του ψευδοαντιστρόφου,

$$AA^{\dagger}A = A, \quad A^{\dagger}AA^{\dagger} = A^{\dagger}$$

$$AA^{\dagger} = (AA^{\dagger})^{T}, \quad {\scriptstyle A^{\dagger}A = (A^{\dagger}A)^{T}}$$

που αποδεικνύονται εύκολα με πράξεις.

Παράδειγμα 2

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να επαληϑεύσετε οτι ο ψευδοαντίστροφος του είναι ο

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

Λυση:

Αρκεί και πάλι να αποδείξουμε οτι ισχύουν οι 4 ιδιότητες του ορισμού του ψευδοαντιστρόφου, ώστε να επαληϑεύσουμε οτι αυτός εινai ο ψευδοαντίστροφος. Πράγμα που αποδεικνύεται εύκολα με πράξεις.

11 Ο πίνακας συσχέτισης

Ο πίνακας συσχέτισης R είναι ενας τετραγωνικός πίνακας που δείχνει τις συσχετίσεις (τον συντελεστή συσχέτισης) μεταξύ των διάφορων μεταβλητών. Τα διαγώνια στοιχεία του είναι ισα με 1. Είναι χρήσιμος στην ανάλυση πολυμεταβλητών δεδομένων, και δείχνει τους συντελεστές συσχέτισης μεταξύ τους. Είναι άμεσα συνδεδεμένος με τον πίνακα διακύμανσης - συνδιακύμανσης Σ που έχουμε ηδη αναλύσει σε προηγούμενο μάθημα.
Ο πίνακας συσχέτισης των ν τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ είναι ο $n \times n$ πίνακας του οποίου τα i, j της εισόδου είναι $corr(X_i, X_j)$. Αν τα μέτρα της συσχέτισης χρησιμοποιούνται ως συντελεστές, ο πίνακας συσχέτισης είναι ο ίδιος με τον πίνακα συνδιασποράς των τυποποιημένων τυχαίων μεταβλητών $X_i/\sigma(X_i)$ για $i = 1, \ldots n$. Αυτό ισχύει τόσο για τον πίνακα συσχετίσεων του πληθυσμού (στην περίπτωση αυτή το σ είναι η τυπική απόκλιση πληθυσμού), οσο για τον πίνακα συσχετίσεων του δείγματος (στην περίπτωση αυτή το σ, δηλώνει η τυπική απόκλιση του δείγματος). Κατά συνέπεια, το καθένα είναι απαραιτήτως ένας θετικός-ημιθετικός πίνακας.
Ο πίνακας συσχετίσεων είναι συμμετρικος διότι η συσχέτιση μεταξύ των X_i, X_j είναι η ίδια όπως η συσχέτιση ανάμεσα σε X_j, X_i.
Η σχέση μεταξύ του πίνακα συσχέτισης R και του πίνακα διακύμανσης- συνδιακύμανσης είναι η ακόλουθη:

$$R = \Delta^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Delta^{-\frac{1}{2}}$$

ισοδύναμα:

$$\Sigma = \Delta^{\frac{1}{2}} R \Delta^{\frac{1}{2}}$$

όπου Δ ένας διαγώνιος πίνακας που έχει στην διαγώνιο του τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα Σ. (τις $Var(X_i)$) Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα συσχέτισης είναι μονάδες.

Παράδειγμα 4 *Έστω ο πίνακας διακύμανσης δύο μεταβλητών Σ.*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8.1 \\ 1 & 16 & 18 \\ 8.1 & 18 & 81 \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστεί ο πίνακας συσχέτισης R.
Λύση:
Βλέπουμε οτι η διαγώνιος του πίνακα Σ αποτελείται απο τους αριθμούς $1, 16, 81$, *αρα ο πίνακας Δ θα είναι ο*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} \quad \text{αρα} \quad \mathbf{\Delta}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Ετσι παίρνουμε:

$$R = \Delta^{-\frac{1}{2}} \Sigma \Delta^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8.1 \\ 1 & 16 & 18 \\ 8.1 & 18 & 81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Ετσι έχουμε οτι

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.9 \\ 0.25 & 1 & 0.5 \\ 0.9 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση του 2×2 πίνακα R, της μορφής

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$$

οι ιδιοτιμές του είναι $1 - r, 1 + r$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $(1, 1)$ και $(-1, 1)$.

◁

12 Ο τύπος των Sherman- Morrison

Έστω ένας αντιστρέψιμος τετραγωνικός $n\times$ πίνακας A και τα διανύσματα u, v.
Τότε, ο αντίστροφος πίνακας του αθροίσματος $(A + uv^\top)$ δίνεται απο τον τύπο

$$(A + uv^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^\top A^{-1}}{1 + v^\top A^{-1}u}$$

Να σημειωθεί οτι η παράσταση $1 + v^\top A^{-1}u$ είναι αριθμός και οχι πίνακας.

Εάν ο αντίστροφος A^{-1} είναι ηδη γνωστός, ο τύπος αυτος μας δίνει εναν υπολογιστικά γρήγορο τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου του νέου πίνακα A, εφόσον αυτός διαταραχτεί / διορθωθεί απο τον πίνακα $uv^\top$. Αυτή η αλλαγή μπορεί να ειδωθεί σαν διαταραχή (perturbation) του A η σαν ανανέωση του (rank-1 update).

Υπολογιστικά μιλώντας, η μέθοδος αυτή ειναι ¨οικονομική' γιατι ο αντίστροφος του $(A + uv^\top)$ δεν χρειάζεται να υπολογιστεί απο την αρχή, αλλά διορθώνοντας τον ήδη γνωστό A^{-1}.

13 Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \text{κουκουβάγιες} & \text{ποντίκια} \\ \left[\begin{array}{c} 0.5 \\ -0.104 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.4 \\ 1.1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{κουκουβάγιες} \\ \text{ποντίκια} \end{array}$$

που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος κουκουβάγιες - ποντίκια σ' ενα οικολόγικο σύστημα. Δείτε τι συμβαίνει στο σύστημα σε βάθος χρόνου.
Λύση:

Το παραπάνω σύστημα απότελει ενα *δυνάμικο σύστημα* του οποιου η εξέλιξη περιγράφεται απο την αναδρόμικη εξίσωση

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Ας βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0.5 - \lambda & -0.4 \\ -0.2 & 1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \lambda_i = 1.02, 0.58$$

με αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα $\boldsymbol{u} = [10, 13]$ και $\boldsymbol{v} = [5, 1]$ που είναι βάση του χώρου και αρα τον παράγουν. Ετσι θα έχουμε

$$x_k = c \cdot 1.02 \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot 0.58 \cdot \boldsymbol{v} \Rightarrow$$

Αρα

$$x_n = c \cdot 1.02^n \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot 0.58^n \cdot \boldsymbol{v}$$

Και αφήνοντας το n να τρέξει στο άπειρο προκύπτει οτι $x_n = c \cdot 1.02^n \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = 1.02x_{n-1}$. Επομένως σε βάθος χρόνου το σύστημα θα ισορροπήσει σε μια αναλογία 10 κουκουβάγιες προς 13 ποντίκια.

◁

2. Να βρέθει η ευθεία ελαχίστων τετράγωνων $y = b_0 + b_1x$ των σημείων A(0,1) , B(1,1) , Γ (2,2) και Δ(3,2).
Λύση:

Το παραπάνω μοντέλο σε μορφη πινάκων έχει την μορφή $Y = Xb$ οπου

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Ετσι έχουμε

$$Xb = Y \Rightarrow X^\top Xb = X^\top Y \Rightarrow \hat{b} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y = X^\dagger Y =$$

με

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{αρα} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Αρα τελικά η ευθεία ελαχίστων τετράγωνω ειναι η $y = 0.9 + 0.4x$.

$\triangleleft$

3. Αποφανθειτε για την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων.
(α) Αν $A = A^\top$, $A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u}$ και $A\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v}$ τοτε το $\boldsymbol{u}$ ειναι κάθετο στο $\boldsymbol{v}$.
(β)Ο $A_{n \times n}$ είναι ορθογώνιος και διαγωνοποιησιμος αν και μονο αν ειναι συμμετρικός.
(γ) Αν $A_{n \times n}$ είναι συμμετρικός τότε έχει διαφορετικές ιδιοτιμες λ_i.

Λύση:

(α) Σωστό, αφού απο το φασμάτικο θεώρημα γνωρίζουμε οτι τα ιδιοδιάνυσματα είναι κάθετα.
(β) Σωστό, αφού για τηνμια κατευθυνση της συνεπάγωγης ($\Rightarrow$), αν A διαγώνοποιήσιμος και ορθογώνιος τοτε έχουμε οτι $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Ετσι για τον $A^\top$ θα έχουμε οτι

$$A^\top = \left(PDP^\top\right)^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A$$

Άρα A συμμετρικός. Για ανάποδη κατεθυνση ($\Leftarrow$) προκύπτει άμεσα απο το φασματικό θεώρημα.
(γ) Λάθος. Ευκολά μπορεί να βρεί κάνεις ένα αντιπαράδειγμα.

$\triangleleft$

4. Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα.

19	22	6	3	2	20
12	6	9	15	13	5

Να γίνει η ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA).

Λυση:
Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρούμε τον μέσο απο κάθε x_i.
Αρα τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 10 & -6 & -9 & -10 & 8 \\ 2 & -4 & -1 & 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} BB^\top = \begin{bmatrix} 86 & -27 \\ -27 & 16 \end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι η συνόλικη διακύμανση είναι ίση με 102.
Ας αρχίσουμε τώρα την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ. Εχουμε ότι

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = 95.2, \lambda_2 = 6.8$$

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ($\lambda_1 = 95.2$) είναι η μεγαλύτερη συνιστώσα. Το αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα της προκύπτει οτι είναι το $u_1 = [0.946, \quad -0.322]^\top$. Αξίζει να σημειώσουμε οτι η συνόλικη διακύμανση

δεν έχει μεταβληθεί ($\lambda_1 + \lambda_2 = 102$).
Ενδείκτικα, αναφέρουμε οτι ένας δείκτης που θα λάμβανε υπόψιν τα δεδομένα θα είναι ο

$$y = 0.946x_1 - 0.322x_2$$

5. Εστω πίνακας $A_{8\times 8}$ με χαρακτηριστικο πολυώνυμο το $h_A(x) = x^2(x-3)^4(x-2)^2$ και ελάχιστο το $pA(x) = x^2(x-3)^2(x-2)$. Να βρεθούν οι πιθανές τετραγώνικες μορφές Jordan.

Λυση:

Βλέποντας τις ιδιοτιμές απο το χαρακτηριστικό πολυωνυμο έχουμε οτι η διαγώνιος θα έχει τα στοιχεία:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι υπάρχουν 3 blocks. Βάσει του ελάχιστου πολυωνυμου όμως καταλήγουμε στο ότι θα

$$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&3&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}$$

◁

6. Εστω η γνωστή παραγοντοποίηση $A = QR$. Εαν ο πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος, θετω $A_1 = RQ$. Να αποδείξετε οτι οι πίνακες A, A_1 είναι όμοιοι.

Λυση:

Εχουμε οτι $A_1 = RQ = Q^{-1}QRQ = Q^{-1}AQ$ επομένως είναι όμοιοι.

◁

7. Εστω $B_{n\times n}$ συμμέτρικος πίνακας και $B^2 = B$. (Επομένως ο B είναι ορθογώνια προβολή). Εστω ενα $y \in \mathbb{R}^n$ και θετουμε $\hat{y} = By$ και $z = y - \hat{y}$.
Να δείξετε οτι $\hat{y} \perp z$, δηλαδή οτι

$$y = By + z, \quad By \perp z.$$

Λυση:

Αρχικά έχουμε οτι

$$B^\top B = B \cdot B = B^2 = B \tag{4}$$

Για να δειξουμε οτι το $\hat{y}$ και το z είναι κάθετα αρκεί να δείξουμε οτι $\langle \hat{y}, z\rangle = 0$. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\begin{aligned}
\langle z, \hat{y}\rangle &= \langle y-\hat{y}, By\rangle \\
&= y(By) - \hat{y}(By) \\
&= y^\top By - \hat{y}^\top By \\
&= y^\top By - (By)^\top By \\
&= y^\top By - y^\top B^\top By \\
&= y^\top By - y^\top B^2 y \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}$$

Αρα είναι κάθετα.

◁

8. Εστω ο στοχαστικός πίνακας

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} \Phi1 & \Phi2 & \Phi3 & \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & \Phi1 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 & \Phi2 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & \Phi3 \end{array}$$

ο οποίος εκφράζει τις διατροφικές προτιμήσεις ενος ατόμου για Φ_i με $i = 1, 2, 3$ διαφορετικά φαγητά. Αν υποθέσουμε οτι την πρώτη μέρα πάρει το φαγητό Φ_1.
(α) Δίνεται οτι οι ιδιοτιμές είναι οι 1, 0.2 , 0.5. Να Βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα.
(β) Διαγωνοποιείται ο πίνακας; Γράψτε την διαγωνοποιηση.
(γ) Πως κατανέμονται οι πιθανότητες των φαγητών μετά απο πολλές μέρες; $(n \to \infty)$

Λυση:

(α) Εχουμε για την $\lambda = 1$ οτι

$$A\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x/3 \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για την $\lambda = 0.2$ οτι

$$A\boldsymbol{v} = 0.2\boldsymbol{v} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε για την $\lambda = 0.5$ οτι

$$A\boldsymbol{w} = 1\boldsymbol{w} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} z/2 \\ -3z/2 \\ z \end{bmatrix} \text{ π.χ. το } \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(β) Ναι, διαγωνοποιειται αφου έχουμε 3 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Θα έχουμε λοιπόν οτι

$$A = P\Delta P^{-1} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

(γ) Έχουμε ενα δυναμικό συστημα της μορφής

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Αρα

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P\Delta P^{-1} \\ \Leftrightarrow x_{k+1} &= P\Delta^k P^{-1} x_0 \end{aligned}$$

Οπότε μετά απο n μέρες θα έχουμε οτι

$$x_n = P\Delta^n P^{-1} x_0 \Rightarrow x_n = P \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0.2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.5^n \end{bmatrix} P^{-1} x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αφήνοντας το $n \longrightarrow \infty$ θα έχουμε οτι

$$x^* = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

οπου και αυτή είναι η κατάνομη των πιθανοτήτων των φαγητών μετα απο πολλές μέρες.

◁

9. Εαν οι ιδιοτιμες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

είναι -6 και κ και τα ιδιοδιανύσματα $(1,3)^T$ $^{(-3,1)^T}$ να βρεθεί το κ και στη συνέχεια ο πίνακας A^{10}
Λύση:
Ισχύει οτι $\Sigma\lambda_i = trace(A) \Rightarrow k = 4$.
Αφού διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A, παίρνουμε

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{10} = A = PD^{10}P^{-1}$$

με $D = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ και $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να βρείτε (α) τις ιδιοτιμες του, (β) τον A^{-1} συναρτήσει του A και
(γ) την ποσότητα $A^3 - 3A^2 + 2A - I$.

Λύση:

(α) Έχουμε

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \lambda = 3$$

(β) Ξερουμε οτι απο το θεωρημα Cayley-Hamilton ο πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αρα έχουμε

$$A^2 - 5A + 6I = 0 \Rightarrow A^2 = 4I \Rightarrow A(\frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A) = I$$

Επομένως, $A^{-1} = \frac{5}{6}I - \frac{1}{6}A$

(γ) Για την ζητουμενη ποσότητα θα πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων.
Παίρνουμε λοιπον οτι $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^2 - 5x + 6)(x - 5) + 36x - 121$. Αντικαθιστώντας οπου x το A και λαμβάνοντας υποψη μας το θεωρημα Cayley-Hamilton (ο πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο) έχουμε οτι

$$A^3 - 3A^2 + 2A - I = 36A - 121I.$$

$Y\backslash X$	1	2	
3	0.3	0.2	0.5
4	0.2	0.3	0.5
	0.5	0.5	1

◁

11. Εστω τα δεδομένα Να βρέθει ο πίνακας συνδιακυμάνσεων.

Λύση:

Εχουμε οτι

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5$$

και

$$\mathbb{E}(Y) = 4 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 3.5$$

και

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot 3 \cdot 0.3 + 2 \cdot 3 \cdot 0.2 + 1 \cdot 4 \cdot 0.2 + 2 \cdot 4 \cdot 0.3 = 5.3$$

αρα και

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 5.3 - 1.5 \cdot 3.5 = 0.05.$$

Εχουμε ακομα οτι

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \Big(\mathbb{E}(X)\Big)^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.5 - (1.5)^2 = 0.25$$

και

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(Y)\Big)^2 = 9 \cdot 0.5 + 16 \cdot 0.5 - (3.5)^2 = 0.25.$$

Αρα εν τέλει ο πίνακας συνδιακύμανσης θα είναι

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.05 \\ 0.05 & 0.25 \end{bmatrix}$$

◁

12. Εστω N φοιτητές που έχουν γράψει 3 διαγωνισματα, των οποιων ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Να βρεθει ένας δείκτης της απόδοσης των φοιτητών της μορφής $y = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, όπου $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ αν x_i τα διαγωνίσματα.

Λύση:

Παρατηρούμε οτι συνολική διακύμανση είναι ίση με $trace(\Sigma) = 5+6+7 = 18$. Αρα το 1ο διαγώνισμα εξηγει το 5/18 της μεταβλητοτητας, το 2ο το 6/18 και το 3ο το 7/18. Βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ βλέπουμε οτι είναι ισες με 3,6,9. Αρα κυρια συνιστώσα είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμη 9 με αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\boldsymbol{u} = (k, 2k, 2k)^\top$ για $k \in \mathbb{Z}$, πχ το $\boldsymbol{u} = (1, 2, 2)^\top$. Ευκολα βλέπουμε οτι $||u|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Ετσι το αντιστοιχο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα θα είναι

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

Αρα εν τέλει ο δείκτης θα είναι

$$y = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3.$$

◁

13. Εστω $f(x, y) = xy(2x + 4y + 1)$. Βρειτε τα ακροτατα.

Λυση:

Ας φτιάξουμε λίγο την μορφη της f για να είναι ευκολότερη η παραγώγιση:

$$(x, y) = xy(2x + 4y + 1) = 2x^2y + 4y^2x + xy.$$

Ας παρουμε τις μερικές τις παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y^2 + y \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 8xy + 2x^2 + x$$

και ας τις μηδενίσουμε

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4xy + 4y^2 + y = 0 \\ 8xy + 2x^2 + x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left. x = -\tfrac{4y^2}{y} - \tfrac{y}{4y} \right\} \Rightarrow \quad x = -y - \tfrac{1}{4} \quad (y \neq 0)$$

Για την ειδικη περίπτωση οπου $y = 0$ έχουμε οτι $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = 0$. Αν αντικαταστησουμε την εκφραση του y που βρηκαμε στην 2η εξισωση προκύπτει οτι $y = -\frac{1}{12}$ και άρα $x = -\frac{1}{6}$ και $y = -\frac{1}{4}$ και άρα $x = 0$. Αρα πιθανά σημεια για ακροτατα είναι τα $A(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ και $B(0, -\frac{1}{2})$. Για να τα επαληθευσουμε ας υπολογίσουμε τις δευτερες παραγώγους. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 8y + 1$$

αρα πινακας του Hess εχει την μορφη

$$H = \begin{bmatrix} 4y & 4x + 8y + 1 \\ 4x + 8y + 1 & 8x \end{bmatrix}.$$

Για το σημειο $A(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ παρατηρουμε οτι $\det(H) = \frac{3}{9} > 0$ και ο H ειναι αρνητικά ορισμένος αρα έχει τοπικό μεγιστο, το $f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12})$.
Για το σημειο $B(0, -\frac{1}{2})$ παρατηρουμε οτι $\det(H) = -1 < 0$ αρα έχουμε σαγματικό σημειο. Για την ειδικη περιπτωση οπου $y = 0$ που εξετασαμε προηγουμένως, θα πρεπει να ελεγξουμε τα σημεια $\Gamma(0, -\frac{1}{2})$ και $\Delta(0, 0)$. Εξετάζοντας τα βλεπουμε οτι δεν εχει ουτε μεγιστο ουτε ελαχιστο.

◁

14. Εστω η συνάρτηση $f(x, y) = (3x + 4y, 2x + 5y)$. Να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x, y)$.

Λυση:

Ο πίνακας της συνάρτησης ως προς την κανονική βάση είναι ο

$$A_f = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο αντίστροφος πίνακας που δίνει την $f^{-1}(x, y)$ είναι ο

$$A_f^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Αρα, $f^{-1}(x, y) = \frac{1}{7}(5x - 4y, -2x + 3y)$.

15. Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα, βαθμοί απο τεστ φοιτητων.

Τεστ 1	10	8	6	5	3
Τεστ 2	8	7	4	6	3

Να βρεθεί ο πίνακας διακυμανσης - συνδιακύμανσης.

Λυση:
Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.4 \\ 5.6 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρώντας τον μέσο απο κάθε x_i οποτε τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix} 3.6 & 1.6 & -0.4 & -1.4 & -3.4 \\ 2.4 & 1.4 & -1.6 & 0.4 & -2.6 \end{bmatrix}.$$

Απ΄ τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} BB^\top = \begin{bmatrix} 7.3 & 4.95 \\ 4.95 & 4.3 \end{bmatrix}$$

16. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -5 & b & a \\ -4 & 2 & a \\ -4 & b & 0 \end{bmatrix}$$

με τριπλή ιδιοτιμή το λ = -1. Να βρεθούν τα a, b
Λύση:
Το χαρ/κο πολυώνυμο του A είναι $P(x) = x^3 + 3x^2 + (4a + 4b - ab - 10)x + 3ab - 8a, \qquad P(-1) = 0,$

$$\Rightarrow (3 - b)1 - a) = 0$$

Επίσης, αφού είναι τριπλή ρίζα, θα έχουμε και οτι $P'(-1) = 0 \Rightarrow 4a + 4b - ab - 13 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 3$

17. Εστω η συνάρτηση (τετραγωνική μορφή) $f(x, y) = 6x^2 - 4xy + 9y^2$
α) Να γραφτεί σε κανονική μορφή
β) Εαν $f(x, y) = 80$ να περιγράψετε το είδος της καμπύλης.

Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$f(x, y) = X^T AX$, ιδιοτιμές 5, 10.

$$A = PDP^{-1}. \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Επομένως, θέτοντας $X = PY$,

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

έλλειψη.

18. Να γίνει παραγοντοποίηση QR του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Λύση:
Κάνουμε Ορθοκανονικοποιήση $GramScmidt$ στις στήλες και παίρνουμε τον πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{3}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

επομένως $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

19. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Βρειτε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Διαγωνοποιειται; Βρειτε τον A^k και το $\lim_{k\to\infty} A^k$.

Λυση:

Κατα τα συνηθη για τις ιδιοτιμές έχουμε

$$\det(A - \lambda) = 0 \Rightarrow \cdots \lambda = 1 \text{ και } \lambda = 0.6$$

Αν $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$ τα δυο ιδιοδιανυσματα, απο τις σχεσεις $A\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u}$ και $A\boldsymbol{v} = 0.6\boldsymbol{v}$ προκυπτει οτι δυο (απο τα απειρα) ιδιοδιανύσματα του πινακα A είναι τα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας διαγωνοποιειται, δεδομένου οτι έχουμε 2 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και αρα μπορει να γραφτει στην μορφη

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Αρα για τον A^k έχουμε οτι

$$\begin{aligned} A^k = P\Delta^k P &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 + 6 \cdot 0.6^k & -3 + 3 \cdot 0.6^k \\ 4 - 4 \cdot 0.6^k & 6 - 2 \cdot 0.6^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ετσι

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

◁

References

[1] Δονάτος Γ., Αδάμ Μ, Γραμμική Άλγεβρα, Θεωρία και Εφαρμογές, Gutenberg 2008.

[2] Strang G, Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, ΠΕΚ 1993.

[3] Lipschutz S., Lipson M. , Schaum Series, Γραμμική Άλγεβρα, Εκδ. Τζιώλα, 2005.

[4] A. Ben-Israel and T. N. E. Grenville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Springer- Verlag, Berlin, (2002)

[5] Lay D., Linear Algebra and its Applications, Addison- Wesley, 4th Ed. 2012.

[6] Meyer C.D., Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, Philadelphia, 2000.