18 Μαΐου.

$\boxed{\text{SVD}}$

$$A^{m\times n} = U \, \Sigma^{m\times n} \, V^T$$

"διαγώνιος"

ορθογώνιοι

$$\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

πχ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(2×3)

Σ: ιδιοτιμές → λ → σ

$AA^T \to U$ $\qquad$ $A^TA \to V$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$$

(θετικά ορισμένος) Ιδιοτιμές: 25, 9

Ιδιοδιανύσματα $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}$

Κανονικοποίηση $(:\sqrt{2})$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$\lambda_i = 25, 9, 0$ θετικά ημιορισμένος

ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

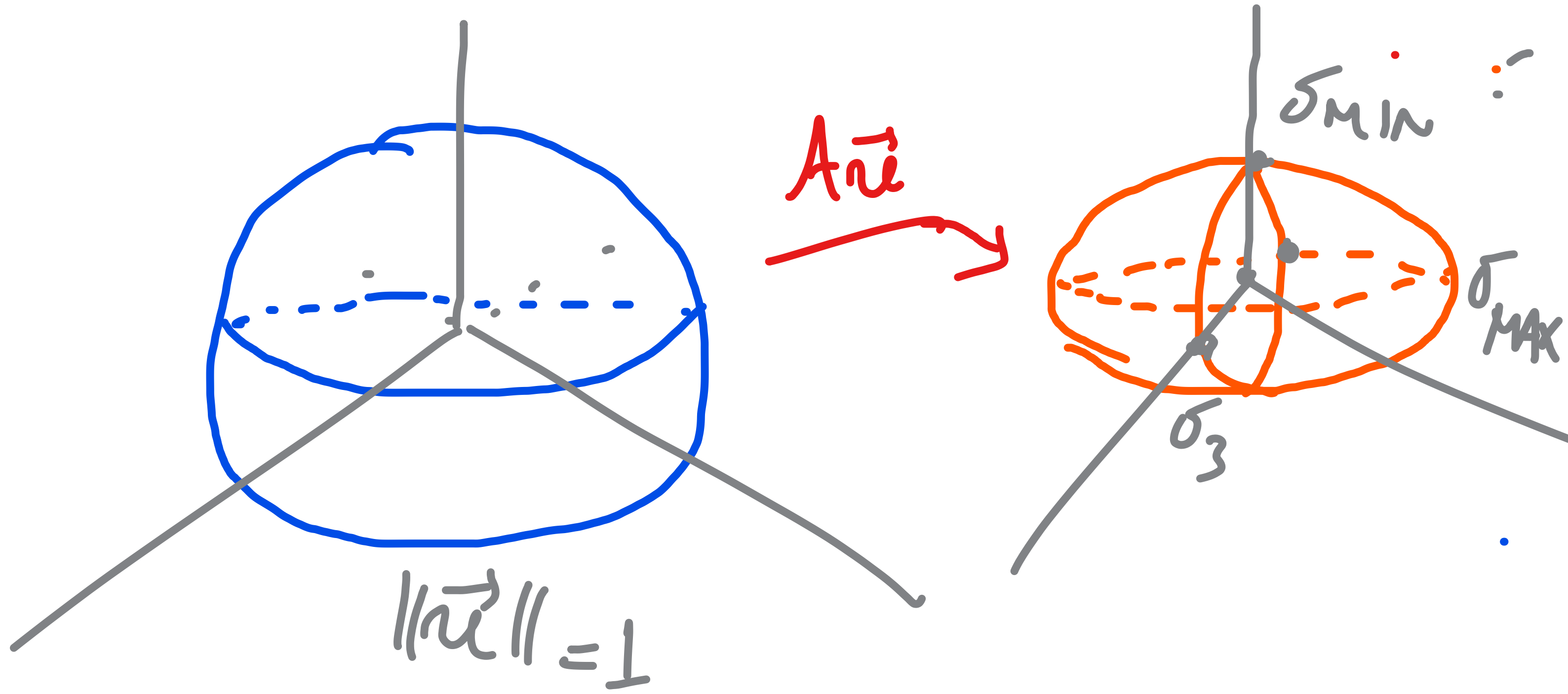
ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ $\longrightarrow$

$$V = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{18} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2/3 & 1/\sqrt{18} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/3 & \frac{-4}{\sqrt{18}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^T.$$

<u>Γεωμ. ερμηνεία</u>

$\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7 \quad (A^{3\times 3})$



γιατί: Α τυχαίος $(\|x\|=1)$ $\|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) =$

$$\underbrace{x^T A^T A x}_{\text{συμμετρικός πίνακας: } B} = x^T B x = \lambda$$

γιατί: B = τετραγ. μορφή

$\Rightarrow \lambda_i \; max = MAX$

όταν $\|x\| = 1$

ΑΛΛΟΙΩΣ:

$\|Bx\| = \|\lambda x\| = |\lambda|$

$\downarrow$ x = ιδιοδ. με $\|x\| = 1$

ΔΕΙΚΤΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΠΙΝΑΚΑ cond (A) = αριθμός

condition number

$$\boxed{cond(A) = \frac{\sigma_{MAX}}{\sigma_{min}}}$$

ΟΣΟ ΠΙΟ ΜΕΓΑΛΟ $\rightarrow$ ΜΕΓΑΛΩΝΕΙ ΤΟ ERROR υπολογιστικά

$I \rightarrow cond(I) = 1$

πχ ~~Αν~~ $cond(A) = 10^k$

$\rightarrow$ k ψηφία στο error

ΤΕΤΡ. ΡΙΖΑ

ΠΙΝΑΚΑ (Αν διαγωνοποιείται)

έστω:

$A = P\Delta P^{-1} \Rightarrow$

$A^{1/2} = P\Delta^{1/2}P^{-1}$ (ΠΙΘΑΝΟΝ: πολλοί πίνακες)

πχ 1: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ διαγωνοποίηση

Ιδιοτιμές $\rightarrow$ $\lambda = 2, 3$ $\boxed{\text{ΝΑΙ}}$

Αντίστοιχα: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ | $\boxed{A = P\Delta P^{-1}}$

ρίζα πίνακα: $\boxed{A^{1/2} = X \Leftrightarrow X^2 = A}$

$$A = P\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}P^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{1/2} = P\begin{bmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1},$$ 4 πιθανές λύσεις:

$$X = A^{1/2} = P\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}, \text{ ή}$$

$$X = P\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1} \text{ ή } X = P\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\text{ή } X = P\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}P^{-1}$$

Όταν ο $A^{n\times n}$ δεν διαγωνοποιείται

Θέτω $T = A^T A$ = συμμετρικός

και $T =$ θετικά ημιορισμένος ($\lambda_i \geq 0$)

Αποδ: $A = U\Sigma V^T$ άρα

$$T = \underline{A^TA} = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T =$$

$$V\Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

ΘΕΤΙΚΑ ⟹ θετικά ημιορισμένος. (psd)

Άρα $T = T^T$, psd. ⟹ έχει ρίζα $= T^{1/2}$

Θέτω $\boxed{|A| = T^{1/2} \Leftrightarrow |A|^2 = T = A^TA}$

{ A όχι διαγωνοποιήσιμος ⟶ A^TA

→ ρίζα του $= |A|$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
(ΔΙΑΣΠΑΣΗ)

τυχαίου $A^{n\times n}$

$$\boxed{A = Q \cdot |A|}$$

ορθογώνιος

$$Q = (A^T)^{-1} \cdot |A|$$

ή

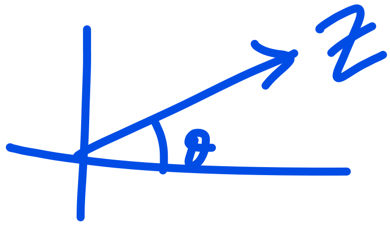
$$\boxed{A = |A| \cdot U}$$

ορθογώνιος

ή $Q = A|A|^{-1}$

υπολογιστικά ακριβό.

Γιατί πολική?



$z = |z| \cdot e^{i\theta}$ πολική μορφή μιγαδικού

Ομοίως $A = |A| \cdot U$

$|A|$ → πληροφορία

U → ορθογώνιος στροφή →

Αποδ Q ορθογώνιος: $A = Q|A|$

$Q = (A^T)^{-1}|A|$

$$Q^T \cdot Q = \left((A^T)^{-1}|A|\right)^T (A^T)^{-1}|A| =$$

$$|A|^T \cdot A^{-1} \cdot (A^T)^{-1} |A| = |A|^T \cdot (A^T A)^{-1} \cdot |A| =$$

$$|A|^T \cdot \left(|A|^2\right)^{-1} \cdot |A| = |A|^T \cdot |A|^{-1} \cdot \underbrace{|A|^{-1} \cdot |A|}_{I}$$

$$\boxed{|A|^T = |A|}$$

$$= |A| \cdot |A|^{-1} = I$$

Άρα $Q^T \cdot Q = I \Rightarrow$

$\underline{Q \text{ ορθογώνιος}}$

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \underset{Q}{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{|A|}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{Q = (A^T)^{-1} \cdot |A|}$$

$|A| = (A^T A)^{1/2}$ = ρίζα του

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

ΣΥΝΔΕΣΗ SVD, Q|A| :

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{UV^T}_{Q}\underbrace{V\Sigma V^T}_{|A|} = Q|A|$$

άρα $|A| = V\Sigma V^T$ από SVD

Απόδ:
$$|A|^2 = (V\Sigma V^T)^2 = V\Sigma \underbrace{V^T V}\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T \quad (1)$$

και
$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T =$$
$$V\Sigma \underbrace{U^T U}\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow |A|^2 = A^T A$ ✓

$A = SVD$, $\quad A = QR$

$A = LU \qquad A = |A| Q$

όχι όλοι $\rightarrow \left(A = P \Delta P^{-1} \right)$

<u>καί</u> η κανονική μορφή Jordan

$$A = P J P^{-1}$$