11 Μαΐου

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(συναρτήσεις πολλών μεταβλητών)

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R})$

$f''(x) \longrightarrow$ ΠΙΝΑΚΑΣ 2ης ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Πορ. 1: x_0 = κρίσιμο σημείο

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ MIN

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ MAX

Η: πίνακας 2ης παραγώγου:

Η θετ. ορισμένος $\longrightarrow$ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

Η αρν. ορισμένος $\longrightarrow$ ΜΕΓΙΣΤΟ

Βήματα

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases}$$

2) ΠΙΝΑΚΑΣ 2ης παραγώγου, αντικαθιστώ τα σημεία..

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

πχ 1 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y)\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4(x-y)\cdot(-1) = \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

<u>Σύστημα:</u> $\begin{cases} \cancel{4}x^3 = \cancel{4}(x-y) \\ \cancel{4}y^3 = \cancel{4}(y-x) \end{cases}$ $+$

$$x^3 + y^3 = x - y + y - x$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \rightarrow$$

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \rightarrow \boxed{y = -x}$$

ή $\rightarrow x^2 - xy + y^2 = 0$

<u>$\Delta < 0$</u>

$$\boxed{\text{Άρα } y = -x}$$

Αντικαθιστώ: $x^3 = x - y \Rightarrow$

$$x^3 = 2x \Rightarrow$$

$$x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$

ΚΑΙ $y=0,\ y=\mp\sqrt{2}$

Άρα ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ:

$$\boxed{O(0,0)\quad A(\sqrt{2},-\sqrt{2})\quad B(-\sqrt{2},\sqrt{2})}$$

2) Πίνακας H:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4x+4y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=4$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4x-4y} \rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4$$

$$H=\begin{bmatrix}12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{bmatrix}$$

α) $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$:

$$H = \begin{array}{cc} + & \\ \left[\begin{matrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{array}$$

$\det H = 400 - 16 > 0$ θετ. ορισμένος

$\Longrightarrow$ A: ελάχιστο

β) $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$:

$$H = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$$

θετ. ορισμένος

$\Longrightarrow$ ΕΛΑΧΙΣΤΟ το B

γ) ΤΟ $O(0,0)$ $\longrightarrow$

$$H = \begin{array}{cc} - & \\ \left[\begin{matrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{array}$$

$\det(H) = 0$

Δεν μπορούμε να αποφασίσουμε με αυτό το κριτήριο.

(ΤΕΛΙΚΑ: σημείο σέλας)

πχ2 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2 + xz - 3\cos y + z^2$$

1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + z = 0$$

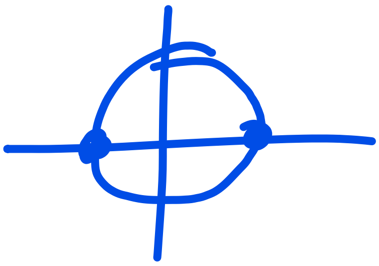
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3\sin y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x + 2z = 0$$

$\sin y = 0$ και $\begin{cases} 2x+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$x = z = 0$



$y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Λύσεις: $(0, k\pi, 0)$.

2) **H**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2.$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 1$$

Άρα

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3\cos y & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(0, \underbrace{k\pi}_{y}, 0)$ **Αντικαθιστώ**

Αφού $\cos(k\pi) = \pm 1$

Περιπτώσεις: $\begin{cases} y = 2k\pi \\ y = (2k+1)\pi \end{cases}$

i) $y = 2k\pi$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} +2 & +6 & +9 \end{array} \checkmark \\ H = & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Ιδιοτιμές : $\lambda = 3, 3, 1$ θετικά

ορισμένος

Άρα $(0, 2k\pi, 0) \longrightarrow$ ελάχιστα

$k \in \mathbb{Z}$

ii) $y = (2k+1)\pi$:

$$\begin{array}{cccc} & + & -6 & -3 \\ H = & \left[\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right] \end{array}$$

(Ιδιοτιμές: $\pm 3, 1$)

Αόριστος ?

$\det(H) \neq 0 \Rightarrow$ Σημεία Σέλας)

$$(0, (2k+1)\pi, 0)$$

Το πηλίκο του Rayleigh.

$R(x)$ = συνάρτηση. $\boxed{A = n \times n}$

$$\boxed{R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}} = \text{αριθμός}$$

$\vec{x}$

(γιατί $x^T A x$ = αριθμός
$x^T x = \|x\|^2$ = αριθμός)

Αν $\|x\| = 1 \longrightarrow R(x) = x^T A x$

Αν το $\vec{x}$ = ιδιοδιάνυσμα

$$R(x) = \frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T \lambda x}{x^T x} = \lambda \cdot \frac{x^T x}{x^T x} =$$

λ

<u>Πολλές φορές</u> έχω $\vec{x}$ = ιδιοδιάνυσμα

$\rightarrow$ $R(x) = \lambda =$ ιδιοτιμή

$$\boxed{\begin{aligned} R(x)_{MAX} &= \lambda_{MAX} \\ R(x)_{min} &= \lambda_{min} \end{aligned}}$$