21 Ane

ΦΡΟΝΤ-1

1 Mc-Laurin:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + R_n$$

πχ $\boxed{f(x) = \ln(x+1)}$ McLaurin

$f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$$

Για $x=0$:

$f'(0) = 1$.

$$f''(x) = -1(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$f''(0) = -1$.

$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$f'''(0) = 2$.

Άρα $f(x) = 0 + 1\cdot x - 1\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots}$$

β) Β΄ μέλος = ΣΕΙΡΑ, ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΗ

Για $x=1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

Β΄ μέλος: $\sum (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu}$ (Leibniz)

Άρα: $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{\nu} \longrightarrow \ln 2$

---

2) $A^{2\times 2}$?

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4$

Ιδιοδιανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Γραμ. ανεξ.

Διαγωνοποιείται $\Rightarrow$ $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\underline{P^{-1}\,?}$ $\quad \det P = 1$

Άρα $P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Άρα:

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

---

3 $\quad$ Σ-Λ:

α) $A_{3\times3}$, ιδιοτιμές : $1, 1, 2$

A = αντιστρέψιμος.

γιατί $\lambda \neq 0$

β) A, $\lambda = -1, 1, 2$.

$\det(A) = -2$ Σ   Λ

$\boxed{\det(A) = \text{γινόμενο } \lambda_i}$

A όχι 3×3

πολλαπλότητα ιδιοτιμών ?

---

4 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -13 & -5 \end{bmatrix}$

ΝΔΟ $A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = I$

Θ. Cayley - Hamilton: Ιδιοτιμές:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -13 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(5-\lambda)(-5-\lambda)+26=0 \Rightarrow \lambda^2-25+26=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda=\pm i$$

Χαρ/κο πολυώνυμο: $x^2+1=0 \Rightarrow$

Θ. C/H $\rightarrow$ $A^2+I=\mathbb{O} \Rightarrow$

$$\boxed{A^2=-I}$$

Άρα $A^{2008}+A^{2006}+A^{2004} =$

$$(A^2)^{1004}+(A^2)^{1003}+(A^2)^{1002} =$$

$$(-I)^{1004} + (-I)^{1003} + (-I)^{1002} =$$

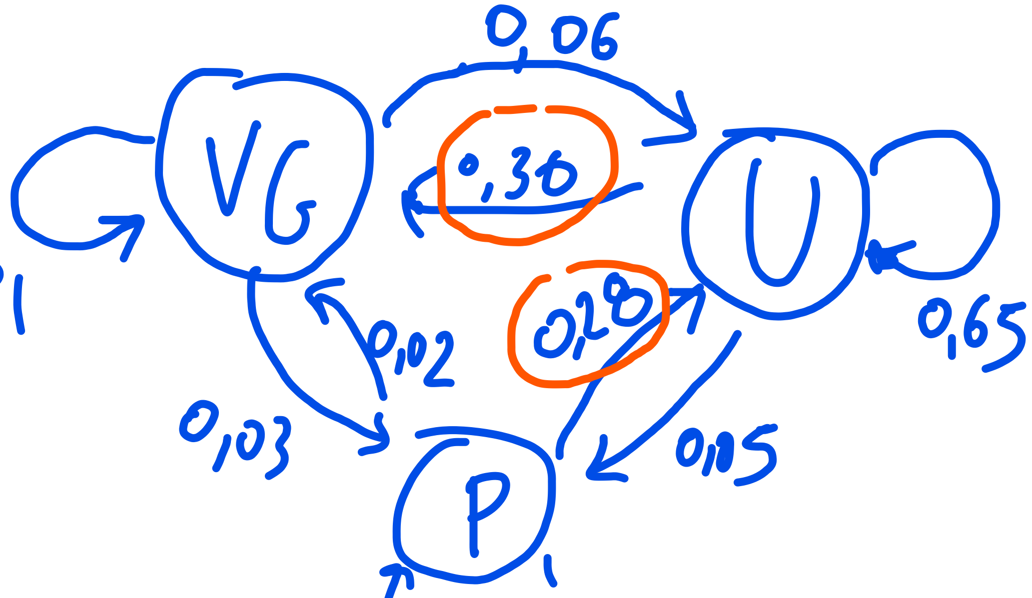
$$\cancel{I} - \cancel{I} + I = I$$

5 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΔΑΦΟΣ: κοντά σε θάλασσα

VG	U	P
καλό έδαφος	μέτριο	όχι χρησιμοποιούμενο

$$\begin{array}{c} VG \\ U \\ P \end{array} \begin{bmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}30 \\ 0{,}10 \end{bmatrix} = \underline{\text{τώρα}} = \vec{x_0}$$



βελτιώνεται

0,70

Πίνακας:

Από

$$T = \begin{array}{ccc|c} VG & U & P & \\ \hline 0{,}91 & 0{,}30 & 0{,}02 & VG \\ 0{,}06 & 0{,}65 & 0{,}28 & U \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}70 & P \end{array}$$

Προς

α) Σε 5 χρόνια?

$$\boxed{\vec{x}_{n+1} = A_n \cdot \vec{x}_n}$$

$$\Downarrow$$

$$(x_n = A^n \cdot x_0)$$

$$T^5 \cdot \vec{x}_0 = T^5 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}30 \\ 0{,}10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}686 \\ 0{,}209 \\ 0{,}104 \end{bmatrix}$$

β) Σε 30 χρόνια?

$$T^{30} \cdot \vec{x}_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 0,695 \\ 0,201 \\ 0,103 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

σταθερή κατάσταση σε βάθος χρόνου

---

6 Τετραγωνική μορφή:

$$\boxed{2x^2 - 4xy - y^2 = -8} \quad (\mathbb{R}^2)$$

Κανονική μορφή, Γεωμ. Παράσταση.
(ΚΩΝΙΚΗ ΤΟΜΗ?)

$\vec{x}^T A \vec{x}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (A = A^T)$$

Διαγωνοποίηση: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{\lambda = 3} \quad \underline{\lambda = -2}$

Ιδιοδιανύσματα: • $\underline{\lambda = 3}$: $A\vec{u} = 3\vec{u} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 3x \\ -2x - y = 3y \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} -2y = x \\ \cancel{-x = 2y} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~πχ~~

$\begin{pmatrix} -2k \\ k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

• $\underline{\lambda = -2}$: $A\vec{v} = -2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -2x \\ -2x - y = -2y \end{cases}$

$$\begin{cases} \cancel{4x = 2y} \\ -2x = -y \end{cases} \rightarrow 2x = y \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R} \xrightarrow{\pi x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\vec{u} \perp \vec{v})$$

$$\downarrow 3 \qquad \hookrightarrow -2$$

$$A = Q \Delta Q^{-1} = Q \Delta Q^{T}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

διαιρω με νορμα : $\sqrt{5}$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = Q \Delta Q^T}$$

$$x^T A x = x^T Q \Delta Q^T x$$

$$\boxed{\text{θέτω } x = Qy}$$

$$\Rightarrow \quad y^T \underbrace{Q^T Q}_{I} \Delta \underbrace{Q^T Q}_{I} y =$$

$$\boxed{y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} = y^T \Delta y \quad (\text{διαγώνιος})$$

Άρα

$$\boxed{-2x'^2 + 3y'^2 = -8}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

$$\rightarrow \boxed{2x'^2 - 3y'^2 = 8}$$

ΥΠΕΡΒΟΛΗ: $$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{8/3} = 1$$

$x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8}$

$y = 0$ Αδύνατο

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

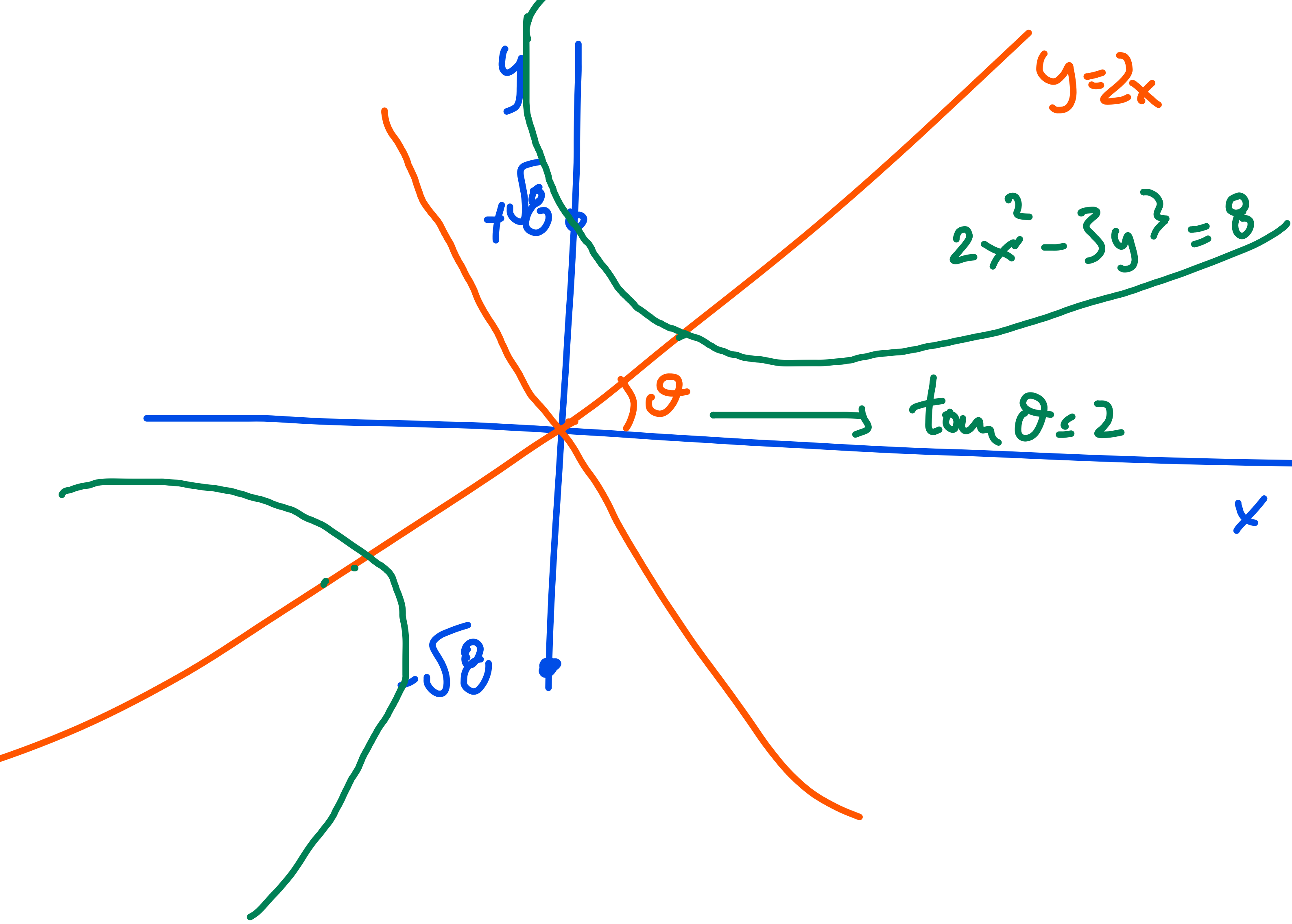
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & +\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 = m$$

(στροφ;!)

$$\boxed{y' = 2x}$$

ΝΕΟΙ ΑΞΟΝΕΣ



y
x
y=2x
2x²-3y²=8
θ
tan θ = 2
+√8
√8