20 Απρ :

ΤΥΠΟΣ TAYLOR

(και Mc LAURIN)

Δυναμοσειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow$ κέντρο το 0

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-k)^n \longrightarrow$ κέντρο το k

πχ $\sum_{0}^{\infty} n x^n : 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \rightarrow +\infty$

πχ2 $x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$

(Γεωμ πρόοδος) $\boxed{S_\infty = \frac{u_1}{1-\lambda}}$ Γεωμ σειρά $|\lambda| < 1$

$u_1 = x$

$\lambda = -x$

$|x| < 1$

Άρα: $x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots = \dfrac{x}{1+x}$

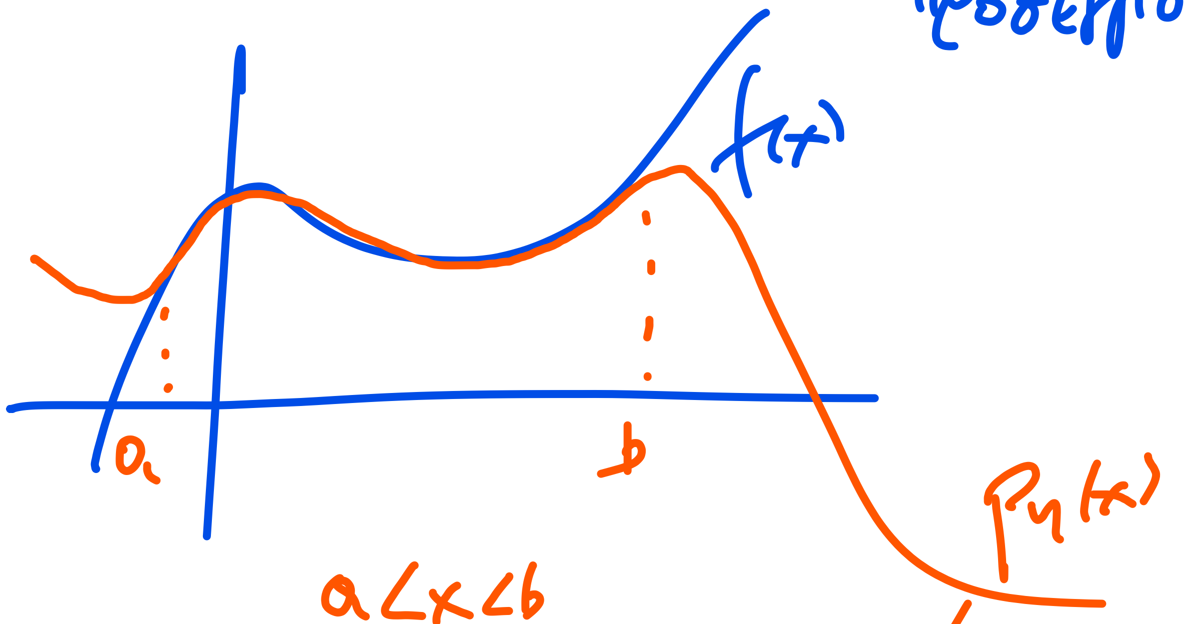
είναι συνάρτηση

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

$f(x) \longrightarrow$ πολυώνυμο $P_n(x)$

$(n \to \infty)$

n μεγαλώνει $\longrightarrow$ καλύτερη προσέγγιση.



$a < x < b$

π.χ. πολυώνυμο <u>Taylor</u>

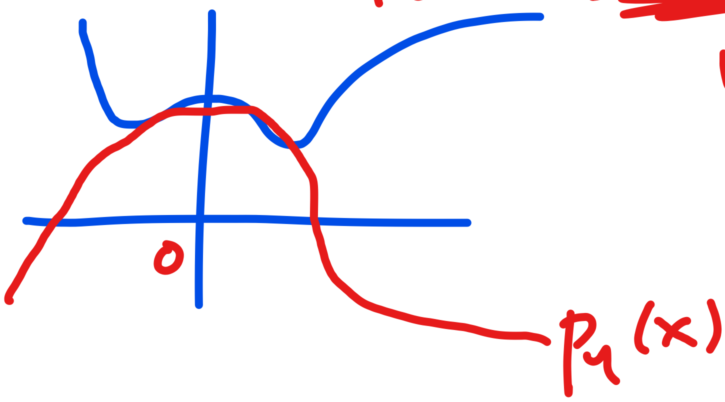
π.χ. Hermite, Lagrange, Chebychev, ...

Γύρω από το $x=0$ Mc Laurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$+ f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

υπόλοιπο $(R_n(x) \to 0)$



$$\int_a^b f(x)\,dx = ? \quad \int_a^b P_n(x)\,dx = \dots$$

πχ1 $f(x) = e^x$ Mc Laurin?

$f(0) = 1$, $f'(x) = e^x \to f'(0) = 1 = f''(0) =$

$f'''(0)$

Ασκ:

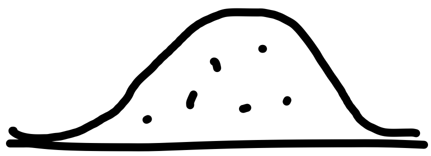
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (1) \quad *$$

$$\sqrt{e} = e^{1/2} \longrightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots}_{1{,}6458}$$

$\sqrt{e} \to 1{,}648$

1,6458 με 4 όρους

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ. e^{-x^2}



$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad \boxed{X \to -x^2}$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \dots$$

Άρα πχ
$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}\,dx$$

TAYLOR (το ίδιο σχεδόν)

γύρω από το $x_0 = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$
$$+ \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Όταν $a = 0$: McLaurin

$f(x) = \sin x$, Taylor ανάπτυγμα? πχ3

$f'(x) = \cos x$ $\quad$ $f'''(x) = -\cos x$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad$ $f^{(4)} = \sin x = f(x)$

Άρα $\sin x = \cancel{\sin 0}^{0} + \cos 0 \cdot x - \cancel{\sin 0}^{0} \cdot \frac{x^2}{2!} - \cos 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cancel{\sin 0}_{0} \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots}$$

(2)

Πχ4 $f(x) = \cos x$ Mc Laurin

$f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x \quad f'''(x) = \sin x$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ Κλπ. **ΑΡΑ:**

$\cos x = \cos 0 + \cancel{\sin 0}^{0} \cdot x - \cos 0 \frac{x^2}{2!} + \cancel{\sin 0}^{0} \cdot \frac{x^3}{3!} + \cos 0 \frac{x^4}{4!}$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \dots}$$

(3)

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots\cdots \quad (*)}$$

(Σύγκλιση = ομοιόμορφη)

Επιτρέπεται η παραγώγιση κατά μέλη, και η ολοκλήρωση κατά μέλη

$$(*) \quad (\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \right)'$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots =$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = \cos x$$

ΤΟ ΥΠΟΛΟΙΠΟ $R_n(x)$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

με $\boxed{0 < c < x}$

θέλω $\boxed{R_n \to 0}$

(έχοντας σταματήσει το άθροισμα στο x^n)

Απόδ. για την $f(x) = e^x$: $R_n \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n+1)}(c) = e^c = \text{αριθμός}$$

$$R_n(x) = \frac{e^c \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) =$$

$$e^c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^c \cdot 0 = 0$$

τείνει στο 0:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{x^{\nu+2}\,(\nu+1)!}{(\nu+2)!\,x^{\nu+1}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{x}{\nu+2}$$

$$= 0$$

Άρα

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$\frac{\sin(x^2)}{x} = ? \quad \underline{|\text{McLaurin}|}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad \boxed{x \to x^2}$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \qquad \boxed{\text{OMA} : x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sin(x^2)}{x} = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} - \frac{x^{13}}{7!} \dots}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(2k+1)} \longrightarrow (4k+2-1)$$