1 Απε. Θ. C-H

$A^{-1}, A^{k}, \dots$

---

# ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

**A B** : $A = PBP^{-1}$

(P = αντιστρέψιμος)

(ή $A = Q^{-1}BQ$)

(θέτω $P = Q^{-1}$)

• $\det(A) = \det(B)$ :

$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\cdot\det(B)\cdot\det(P^{-1})$

$$= \underbrace{\det(P)\cdot\det(P^{-1})}_{1}\cdot\det(B)$$

$$= \det(B)$$

- $A^T, B^T$ όμοιοι :

$$A = PBP^{-1} \Rightarrow A^T = (PBP^{-1})^T \Rightarrow$$

$$A^T = (P^{-1})^T B^T P^T \Longrightarrow \left(\text{θέτω } K = (P^{-1})^T\right)$$

$$A^T = K B^T K^{-1} \quad \checkmark$$

---

- $\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}(B)$.

<u>Γιατί</u>: $tr(A) = tr(PBP^{-1}) =$

$$tr(PP^{-1}B) = tr(B)$$

• **Αν** $A^2 = A \Rightarrow B^2 = B$

**Γιατί:** Έστω $A^2 = A$.

$$A = PBP^{-1} \Downarrow P^{-1}AP = B$$

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 =$$

$$P^{-1}A\underbrace{P \cdot P^{-1}}_{I}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = B$$

---

$A, B$ όμοια $\Rightarrow$ $A^k, B^k$ όμοιοι $k \in \mathbb{N}^+$

**Γιατί:** $A^k = (PBP^{-1})^k =$

$$(PB\cancel{P^{-1}}) \cdot (\cancel{P}B\cancel{P^{-1}}) \cdot \ldots \cdot (\cancel{P}B\cancel{P^{-1}})(\cancel{P}BP^{-1}) =$$

$(k$ φορές$)$

$$\boxed{A^k = P \cdot B^k \cdot P^{-1}}$$

$A^k$ όμ. $B^k$

πχ  $A: 2\times 2$  τυχαίο :

($D$ = διαγώνιος)

$A = P \cdot D \cdot P^{-1} =$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} =$$

$$\begin{bmatrix} 19 & -5 \\ 30 & -6 \end{bmatrix} = A.$$

$\boxed{A \simeq D}$

(Διαγωνοποίηση του $A$)

$A = PD \cdot P^{-1}$

εφαρμογή

Έστω $A$ πίνακας $(n\times n)$

$A \longrightarrow X$ ?  $X^2 = A$

$X^2 = A \Rightarrow X = A^{1/2}$. ?

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow \boxed{A^{1/2} = PD^{1/2}P^{-1}}$$

$$\Rightarrow A^{1/2} = X = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}^{1/2} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix} = X.$$

Uea $X^2 = A$

# ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ($A^{n\times n}$)

$$A = PDP^{-1} \quad (D = \text{διαγώνιος})$$

$$\Updownarrow$$

$$D = P^{-1}AP$$

**ΠΟΤΕ?** η ιδιοδιανύσματα (Γ.Α.)

- A αντιστρέφεται? → Ιδιοτιμές
  (Αν $\lambda = 0 \Rightarrow$ ΟΧΙ)

- A διαγωνοποιείται? → Ιδιοδιανύσματα
  (η το πλήθος)
  ΝΑΙ

Ιδιοτιμές $\lambda_i$:
- $\sum \lambda_i = \text{trace}(A)$
- $\prod \lambda_i = \det(A)$

---

πχ 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3 \times 3)$$

Ιδιοτιμές? $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \ldots\ldots$

$\lambda = 3$, $\lambda = 0$ (διπλή)

Ιδιοδιανύσματα? $\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. NAI (3 διανύσματα)

$$A = PDP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

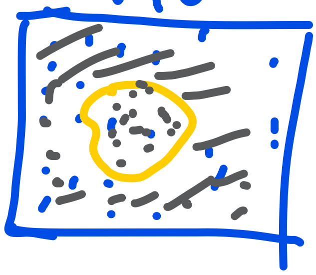
Jpeg : $1024 \times 840 \longrightarrow A^{1024 \times 840}$

χρώμα $\longrightarrow$ αριθμό

RGB

840

840



$\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_\nu \end{bmatrix}$$