30 Μαρ 2

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα :

$A^{n\times n} \to$ Ιδιοτιμές λ_i

$\to$ Ιδιοδιαν. $\vec{u}_i$

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0} \Rightarrow \lambda = \dots$$

$$\boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$ για καθε λ.

πχ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ λ?

$(A^{2\times 2})$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = 0 \to$$

$-3-\lambda+3\lambda+\lambda^2-5=0 \rightarrow$

$\lambda^2+2\lambda-8=0$ $\Delta= \ldots$

$\lambda=+2,\ \lambda=-4$

$\boxed{h_A(x)=x^2+2x-8}$ 2ου βαθμού

του A.

$\boxed{\text{Αλγ. πολλαπλότητα}}=1$

$\begin{cases} m(2)=1 \\ m(-4)=1 \end{cases}$

$\boxed{\text{Γεωμ. πολλαπλότητα}}$ $d(\lambda)=$

η διάσταση του ιδιόχωρος

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$h_A(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 5$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \ldots$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

Horner

± 1
± 5

$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$m(5) = 1 \qquad m(1) = 2$ διπλή ρίζα.

Διανύσματα: $\boxed{Au = \lambda u}$

$\lambda = 5$: $A\vec{u} = 5\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$

πχ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

διάσταση ιδιόχωρου $= 1 \rightarrow$

$d(5) = 1$

$\lambda = 5$ ισορεροπημένη

• $\lambda = 1$: $A\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} k \\ \lambda \\ -k-2\lambda \end{pmatrix}$

dim χώρου $= 2 \Rightarrow$

$d(1) = 2$

$\lambda = 1$ Ισορεροπημένη

$\Longrightarrow A =$ απλής δομής

$\Longrightarrow$ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

ΧΑΡ/ΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

$h_A(x)$.

Θ C-H : $x \longrightarrow A \Rightarrow h(A) = 0$

Τιμή πολυωνύμου ρίζι στον A:

πχ $P(x) = x^2 + 3x - 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} : \quad P(A) = \underset{2\times 2}{A^2} + \underset{2\times 2}{3A} - \underset{2\times 2}{2I}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{bmatrix} = P(A)$$

Πχ 2: Θ - C.H $P(A) = \mathbb{O}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$h_A(x)$?

χαρ/κο πολ.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

$\lambda \neq 0, \Rightarrow A^{-1}$ υπάρχει

$$h_A(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$h_A(A) = A^2 - 5A + 6I =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\ldots \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές των Θ. C-H

A: ... $(n \times)$ $h_A(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow$

$$A^2 - 5A + 6I = \mathbb{O}$$

i) A^{-1} συναρτήσει των A, I:

$$A^2 - 5A = -6I \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{5}{6}A = I \Rightarrow$$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I}$$

$$A\underbrace{\left(-\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I\right)}_{A^{-1}} = I$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I}$$

ii) A^3, A^4? συναρτήσει των A, I

C-H: $A^2 - 5A + 6I = \mathbb{O}$

$\Rightarrow A^2 = 5A - 6I \quad (\cdot A)$

$A^3 = 5A^2 - 6A = 5(5A - 6I) - 6A$

$$\Rightarrow \boxed{A^3 = 19A - 30I}$$

Άρα $A^4 = 19A^2 - 30A =$

$19(5A - 6I) - 30A =$

$$\boxed{65A - 114I = A^4}$$

$$\begin{cases} A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = \ldots\ldots \\ A^4 = 65 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 114 & 0 \\ 0 & 114 \end{bmatrix} = \end{cases}$$

ΠΙΟ ΓΡΗΓΟΡΟ

iii) Να βρεθεί ο πίνακας

$$\boxed{A^3+4A^2+8A-5I \quad ?}$$

Θ. C-H : $A^2-5A+6I=0$ (χαρ/κό πολυώνυμο)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

$P(x) : S(x)$

$P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x)$

$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$

Ευκλείδια διαίρεση

πχ $20=7\cdot 2+6$

$$\boxed{\upsilon<\delta}$$

$x^3+4x^2+8x-5 :$

x^2-5x+6

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2+8x-5 & x^2-5x+6 \\ \hline -x^3+5x^2-6x & x+9 \\ \hline 9x^2+2x-5 & \\ -9x^2+45x-54 & \\ \hline 47x-59 =\upsilon & \end{array}$$

Βαθμός $R(x)$ < Βαθμός $S(x)$

$20 = 7 \cdot 3 - 1$

ΟΧΙ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Άρα:

$$A^3 + 4A^2 - 8A - 5I =$$

$$\underbrace{(A^2 - 5A + 6I)}_{=0}(A + 9I) + 47A - 59I$$

$$= 47A - 59I$$

Αντικαθιστώ $A, I = \ldots$

πχ 3: $A^{(3\times3)}$ (pdf) A^{-1}?

$$P_A(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

Θ.C-H: $A^3 - 7A^2 + 16A = 12I \Rightarrow$

$$\frac{1}{12}A^3 - \frac{7}{12}A^2 + \frac{16}{12}A = I \Rightarrow$$

$$A\underbrace{\left[\frac{1}{12}A^2 - \frac{7}{12}A + \frac{4}{3}I\right]}_{A^{-1}} = I$$

A^{-1} ως πολυώνυμο

$$A^{-1} = P(A)$$

ΟΜΟΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

A, B $(n \times n)$

A όμοιος $B \Longleftrightarrow \exists\, P$ αντιστρεψ.

$$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$$

ή $\quad B = P^{-1} A P$

<u>πχ</u> $A =$ τυχαίο $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$P =$ τυχαίο $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}}$$

$$B = P^{-1} A P =$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \dots$$

όμοιος A

Θ Αν A, B όμοιοι $\Rightarrow$ ίδιες ιδιοτιμές

Απόδ Έστω $B = P^{-1}AP$.

Τότε: $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1} \cdot P =$

$$= P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Άρα $\det(B - \lambda I) = \det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right)$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \underbrace{\det P \cdot \det P^{-1}}_{= 1} \cdot \det(A - \lambda I)$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

$= 0 \Rightarrow$ ίδια λ_i.

Ιδιοδιανύσματα? $(B = P^{-1}AP)$

Έστω $\vec{u} \longrightarrow A$ (για ίδιο λ)

$\vec{v} \longrightarrow B$

$$\vec{u} = P\vec{v}$$

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ γιατί

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) \Rightarrow$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$