

4 Μαθηματικά

Γραμμ. απεικονίσεις

$$\begin{cases} T(x+y) = T(x) + T(y) \\ T(\lambda x) = \lambda T(x), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

~~απ~~
 $y = ax$ στον \mathbb{R}^2

↔ ΕΝΑΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

απ
 $T(x, y) = (x, y, x+y)$ (\mathbb{R}^3)

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0, 1)$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 1, 1)$$

Πυρήνας: $N(A)$
(Μηδενόχωρος) $\left\{ \vec{x} : \{ A\vec{x} = \vec{0} \} \right\}$

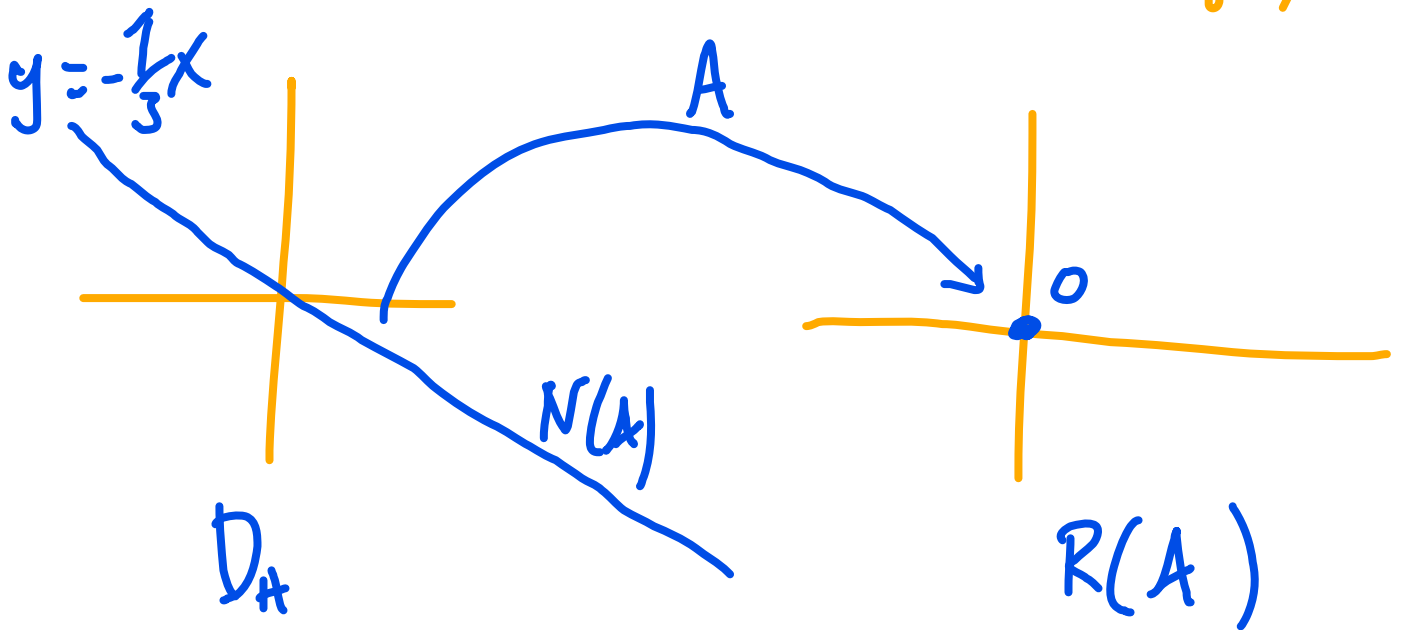
$$\underline{2 \times} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x$$

$$\begin{pmatrix} k \\ -\frac{1}{3}k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$



$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Form $V: A \cdot x.$

(vector space)

NORM

ΝΟΡΜΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

$$\|\vec{u}\| = \text{αριθμός.}$$

1) $\|\vec{u}\| \geq 0$, Αν $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$

2) $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

3) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p \right)^{1/p}$$

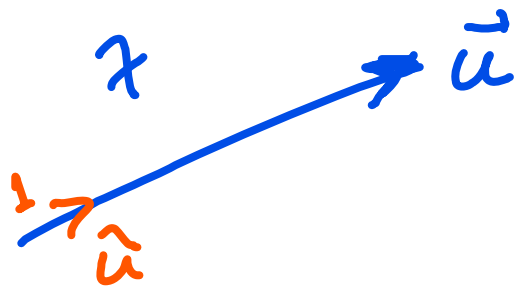
πχ $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots}$

ΚΑΝΟΝΙΖΟΤΟΙΗΣΗ : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = 7$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$$

\vec{u} ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ = $\begin{pmatrix} 6/7 \\ -3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$

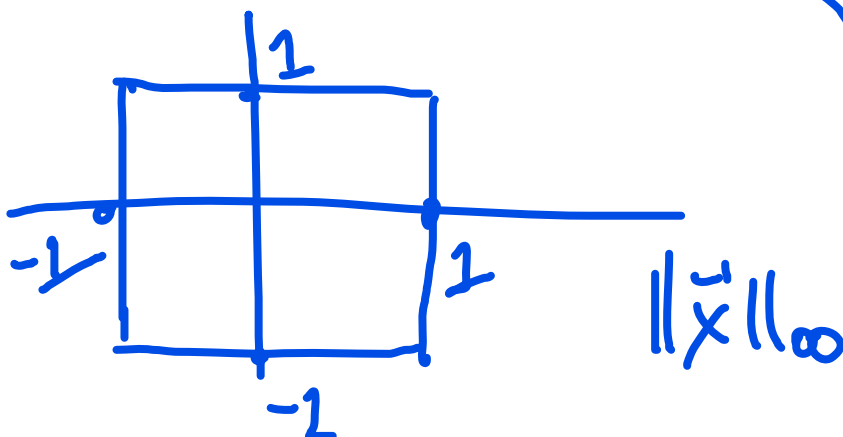
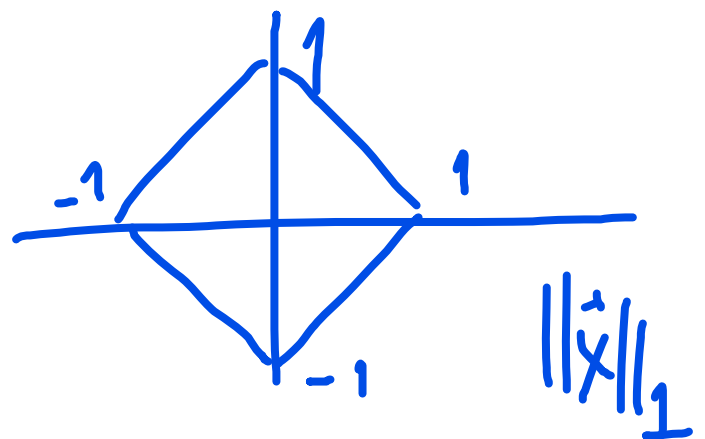
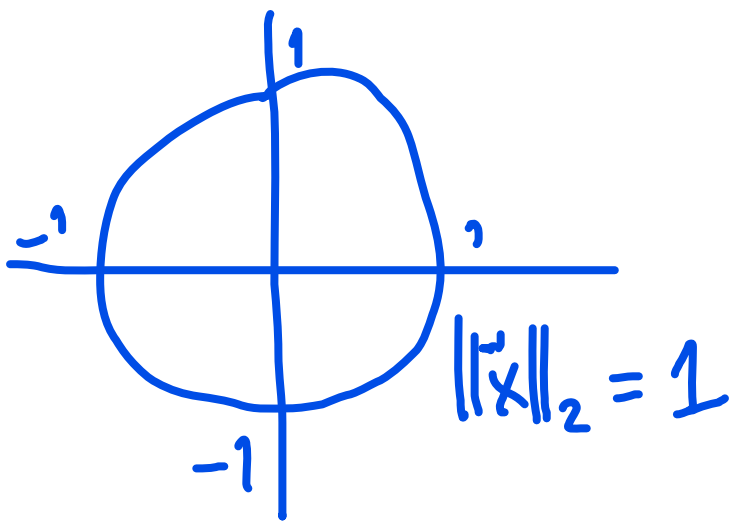


$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max |x_i|$$

(sup norm)


 ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ
 ΣΦΑΙΡΑ



MATRIX NORMS:

$A^{m \times n}$

(ΝΟΡΜΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ)

- $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$ ($\lambda =$ ιδιοτιμές)
- $\|A\|_1 =$ Μεγαλύτερο (απόλυτως) άθροισμα στήλων
- $\|A\|_\infty =$ Μεγαλύτερο (απόλυτως) άθροισμα γραμμών

$$\begin{array}{l} m \times n \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \|A\|_1 = 14 \\ \|A\|_\infty = 13. \end{array}$$

ΚΑΙ $\|A\|_F = \text{trace}(A^T A)$

(Frobenius norm)

(ΙΧΝΟΣ)

trace εως $A^{n \times n}$ = αθροίσμα διαγωνίων
στοιχείων

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{trace} = 12$$

$$A^T A = \text{τετραγων.}$$

Ερωζ. Γινόμενο

$$\left(\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \right)$$

$$\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \text{αριθμός}}$$

Εστω V δ.χ., $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$\boxed{k, \lambda \in \mathbb{R}}: 1) \langle k\vec{x} + \lambda\vec{y}, \vec{z} \rangle = k \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \lambda \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

$$2) \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$3) \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (Av = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

Δx Ορίγω σζορ $\delta.x$. $C [0,1]$ (continuous)
 (συνεχής συναρτήσεις)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Αν $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ στο $[-\pi, \pi]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{0}}$$

Άρα $f(x) \perp g(x)$

βάσει του $\langle f, g \rangle$ που έβρε.

Πη 2: $\langle A, B \rangle = \text{trace}(B^T \cdot A)$

$(A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}) = \text{αριθμός}$.

γιατί οχι?

$A \cdot B = \dots$
οχι αριθμός

Απόσταση σε χώρους με norm:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

1) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, y) \leq d(x, w) + d(y, w)$

NORM \rightarrow προέρχεται από $\langle u, v \rangle$

Θεώρημα: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

Δ.Χ με νόρμα, η οποία επάγεται
από $\langle x, y \rangle$ με ανόσωση
ορισμένη από νόρμα

ΠΛΗΡΗΣ Δ.Χ

(χώρος Hilbert)

4 ΥΠΟΧΡΟΥΣ:

$R(A)$

$N(A)$

$R(A^T)$

$N(A^T)$

ΜΗΔΕΝΟΧΩΡΟΣ

συνός
(pivot)

Gauss

$$A: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R(A^T) = (1, 3, 2)^T$$

$$R(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = \text{συνός}$$

$$2 + 1 = 3$$

$$\begin{cases} R(A) = N(A^T)^\perp \\ N(A) = R(A^T)^\perp \end{cases}$$