Γραμμική Άλγεβρα II

Εφαρμογή: Στοχαστικοί πίνακες
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

14 Μαρτίου 2017

1 Δυναμικά Συστήματα της μορφής $x_{k+1} = Ax_k$

ΟΙ ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μας δίνουν λύσεις στην κατανόηση τηε συμπεριφοράς σε βάθος χρόνου (την μακροχρόνια εξέλιξη) ενος διακριτού δυναμικού συστήματος που περιγράφεται απο μια εξίσωση της μορφής $x_{k+1} = Ax_k$. Το διάνυσμα x_k μας δίνει πληροφορία για το σύστημα την χρονική στιγμή k. Τέτοιες εξισώσεις χρησιμοποιούνται πχ. για την μοντελοποίηση αυξομοιώσεις πληθυσμών, και τέτοια παραδείγματα θα παρουσιάσουμε σε αυτο το μάθημα, κυρίως γιατι τέτοια μοντέλα είναι ευκολότερο να παρουσιαστούν απ οοτι παραδείγματα φυσικής ή μηχανικής.
Υποθέτουμε οτι ο τετραγωνικός πίνακας $A, \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι διαγωνοποιήσημος, επομένως έχει n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots v_n$. Ετσι, το αρχικό διάνυσμα x_0 μπορεί να γραφτεί ως

$$x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots c_nv_n$$

Επομένως, $x_1 = Ax_0 = A(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots c_nv_n) = A\lambda_1v_1 + A\lambda_2v_2 + \ldots A\lambda_nv_n$ Έτσι, παίρνουμε :

$$x_k = A\lambda_1^kv_1 + A\lambda_2^kv_2 + \ldots A\lambda_n^kv_n$$

Παίρνοντας λοιπόν το όριο $lim_{k\to\infty}$ έχουμε την συμπεριφορά του συστήματος σε βάθος χρόνου.

1.1 Στοχαστικοί πίνακες

Στοχαστικός πίνακας ονομάζεται ενας τετραγωνικός πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία τα οποία αναπαριστουν πιθανότητες. Οι γραμμές (ή οι στήλες του) έχουν άθροισμα 1. Ονομάζεται και πίνακας μετάβασης.
Εάν οι γραμμές (στήλες) αθροιζουν στην μονάδα, λέγεται δεξιά στοχαστικός (αντίστοιχα αριστερά στοχαστικός) Οι στοχαστικοί πίνακες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Οι ιδιοτιμές του λ είναι μη αρνητικές και έχουν την ιδιότητα $|\lambda_i| \leq 1$
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ = 1.
3. Το γινόμενο 2 στοχαστικών πινάκων είναι στοχαστικός πίνακας. Επομένως, και οι δυνάμεις ενος στοχαστικού πινακα ειναι στοχαστικός πίνακας.

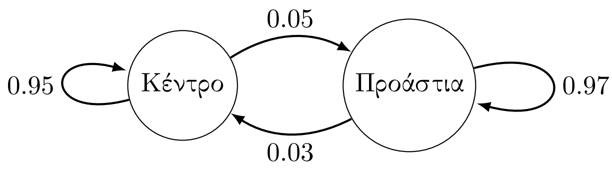
Απο την σχέση $x_k = A\lambda_1^kv_1 + A\lambda_2^kv_2 + \ldots A\lambda_n^kv_n$ λοιπόν, βλέπουμε οτι η ιδιοτιμή λ = 1 εόιναι που καθορίζει την συμπεριφορά του συστήματος, καθώς οι υπόλοιπες μηδενίζονται παίρνοντας το όριο του κ στο άπειρο.

Παράδειγμα:
Έστω μια πόλη με πλήθυσμο 1 εκατομύριο κατοίκους. Γνωρίζουμε οτι 600.000 αυτών ζουν στο κέντρο, ενω 400.000 ζούν στα προάστια της συγκεκριμένης πόλης. Επίσης η μετακινήσεις αυτών περιγράφονται απο τον παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{κέντρο} & \text{προάστια} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{κέντρο} \\ \text{προάστια} \end{array}$$

Ενδιαφερόμαστε για το τι θα συμβεί στον πληθυσμό της πόλης μετά απο πολύ καιρό.

Μπόρει κάνει ευκόλα να παρατηρήσει οτι τα στοιχεία του πίνακα A έχουν μια πόλυ συγκεκριμένη ιδιότητα: οι στήλες του αθροίζουν στη μονάδα. Αυτο δεν είναι τυχαίο, ο παραπάνω πίνακας ανήκει σε μια κατηγορία πινάκων που ονομάζονται *στοχάστικοι πίνακες* ή *πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης*. Σχήματικα, μπορούμε να το αναπάραστήσουμε τον παραπάνω πίνακα ως εξης



οπου τα στοιχεία του πίνακα περιγράφουν την πίθανοτητα ειτε ο πληθύσμος να μήν αλλάξει την κατάσταση του, είτε να μετάβει απο μία κατάσταση σε μια άλλη. Σημειώνουμε οτι στην περίπτωση μας οι κατάστασεις είναι το κέντρο και τα προάστια της πόλης.

Αξιζει να αναφέρουμε πως όλα τα παραπάνω ορίζουν μια (διακριτή) *άλυσιδα Markov*. Τετοιές αλυσίδες βρίσκουν εφάρμογη σε πόλλες περιοχές των εφαρμόσμένων μαθηματικών και αποτέλουν ακρογωνιαίο λίθο ορισμένων πολύ σημαντικων στατιστικων τεχνικών όπως η MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Ολα αυτα μελετώνται εκτενέστερα σε επόμενα μάθηματα στοχάστικών διαδικάσιων γι΄ αυτο και δεν θα επέκταθουμε περαιτερω.

Στα πλαίσια της Γράμμικης Άλγεβρας, η εξέλιξη του πλήθυσμού της πόλης περιγράφεται απο την εξίσωση

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{με} \quad \text{αρχικές συνθήκες} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Κατα τα γνώστα, βρίσκοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A προκύπτει οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 0.92$$

και

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Τα v_1, v_2 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ αφου είναι δισδιάστατα και γράμμικα ανεξάρτητα αρα έχουμε ότι

$$x_0 = \mu v_1 + w v_2 \Rightarrow x_0 = \mu \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ w \end{bmatrix}$$

Αρα, με λίγη άλγεβρα πίνακων, έχουμε οτι

$$\begin{aligned} \mu &= 0.125 \\ w &= 0.225 \end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει οτι

$$x_0 = 0.125 v_1 + 0.225 v_2$$

Αν βάσει της (1), πολλάπλασιασουμε επι A θα έχουμε οτι

$$x_1 = 0.125 \cdot 1 \cdot v_1 + 0.225 \cdot 0.92 \cdot v_2$$

ενω αντίστοιχα αν πολλαπλάσιασουμε k φορές επι A θα έχουμε

$$x_k = 0.125 \cdot 1^k \cdot v_1 + 0.225 \cdot 0.92^k \cdot v_2$$

Εν τέλει, αν $k \longrightarrow \infty$, ο δεύτερος όρος στο άθροισμα θα μηδενιστεί και έτσι θα προκύψει οτι

$$x_* = 0.125 v_1 = 0.125 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$$

Οπότε, μετά απο πόλυ καιρό αναμένουμε ότι ο πλήθυσμός της πόλης θα βρέθει σ' αυτήν την κατάσταση.

$\triangleleft$