Τετραγωνική Ρίζα πίνακα -Πολική αναπαράσταση

Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

May 9, 2018

Τετραγωνική ρίζα πίνακα

Να βρέθει η τετραγωνική ρίζα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση:
Βρισκόντας τις ιδιοτιμές του πίνακα A (είτε με το χέρι ειτε με κάποιο μαθηματικό πακέτο) καταλήγουμε στο ότι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$ και με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ετσι κατα τα συνήθη έχουμε οτι

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ετσι υψώνουμε τον A στην $1/2$ υψώνοντας ουσιαστικά τα στοιχεια του Δ και έχουμε οτι

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1}$$

οπου θα έχουμε 4 λύσεις για την ρίζα, πραγμα λόγικα αφου οπως θυμόμαστε η τετραγώνικη ρίζα του πίνακα δεν ειίναι μοναδικά ορισμένη. Πιο συγκεκριμένα έχουμε οτι

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{και} \quad A^{1/2} = P \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1},$$

$$A^{1/2} = P \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{και} \quad A^{1/2} = P \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$\triangleleft$

Για την τετραγωνική ρίζα πίνακα, οπώς την υπολογισαμε στην προηγουμενη ασκηση απαιτουσαμε ολες οι ιδιοτιμες του εν λόγω πίνακα να ειναι μη αρνητικες, λογω του οτι θέλαμε να τις βάλουμε σε τετραγώνικη ρίζα αφοτου κάνουμε την διαγώνοποιηση. Μια τέτοια συνθήκη όμως σε πολλές περιπτώσεις οπου ενδέχομενως να χρειαζόμαστε μια τετραγώνικη ρίζα κάποιου πίνακα να μην είναι αληθης. Επιγράμματικα, αναφέρουμε οτι για τους τετραγωνικούς και αντιστρεψιμους πίνακες μπορούμε να την παρακάμψουμε και άρα να υπολογίσουμε τέτραγωνικές ρίζες τέτοιων πινάκων ακομα και με με αρνητικές ιδιοτιμές.
Θέτουμε $T = A^\top A$ οποιος οπως ευκολα καταλαβαίνουμε είναι θετικά ορισμενος
(Απο SVD : $A^\top A = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$), και οριζουμε τον

$$|A| := T^{\frac{1}{2}}$$

απο το οποιο προκύπτει οτι $|A|^2 = A^\top A$.

Πολική Ανάλυση πίνακα

Εκτος απο τις γνωστές παραγοντοποιήσεις που έχουμε δεί ως τωρα, υπαρχει και η *πολικη ανάλυση πινάκων*, συμφωνα με την οποια έχουμε οτι μπορουμε να παραγοντοποιησουμε ένα πίνακα ως

$$A = Q|A|$$

οπου ο πίνακας $Q = (A^\top)^{-1}|A|$ είναι ορθογώνιος. Αυτο φαίνεται σχετικά ευκολα με λίγη αλγεβρα πινάκων:

$$\begin{aligned} Q^\top Q &= |A|^\top A^{-1}(A^\top)^{-1}|A| \\ &= |A|^\top (A^\top A)^{-1}|A| \\ &= |A|^\top |A|^{-2}|A| \\ &= |A|^\top |A^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

αφου ο $|A|$ είναι συμμετρικός.

Με λίγη φαντασία, μπορεί κανείς να διαπιστώσει οτι η πολικη παραγοντοποίηση $A = Q|A|$ θυμίζει (και έχει) παρόμοια λογικη με την αναπαράσταση των μιγάδικων αριθμων, $z = |z|e^{i\theta}$, αν $|\cdot|$ το μέτρο ενος μιγάδικου αριθμού, i η φαντάστικη μονάδα και θ η γώνια του. Τελος, σχετικα με την ρίζα αναφέρουμε οτι εκτός απο Q τετοιος ώστε $A = Q|A|$ υπάρχει και πίνακας U τέτοιος ώστε $A = |A|U$.