ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ- ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ

<u>Ορισμός</u>: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$.

Η απεικόνιση $f : V \times V \to \mathbb{R}$ θα είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο V και θα συμβολίζεται με $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ αν $\forall x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Αυτός ο χώρος τότε λέγεται **διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο,** ή **Ευκλείδειος χώρος.**

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:</u>

• Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται σε κάθε ζευγάρι διανυσμάτων ως γνωστόν $\langle x, y \rangle = \vec{x}.\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

• Στον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [-1, 1], τον $C[-1,1]$ ορίζεται ως εσωτερικό γινόμενο το

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και ένα διάνυσμα $x \in V$.

Ονομάζουμε **μέτρο (norm)** του χ τον αριθμό $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

• Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και δύο διανύσματα $x, y \in V$. Αυτά λέγονται **ορθογώνια(κάθετα)** αν και μόνο αν $\langle x, y \rangle = 0$.

• Ένα υποσύνολο S του V λέγεται **ορθογώνιο σύνολο** αν τα στοιχεία του είναι ανα 2 ορθογώνια. Το S λέγεται **ορθοκανονικοποιημένο** αν τα διανύσματα είναι και μοναδιαία. (πχ οι κανονικές βάσεις στους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ κλπ)

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ GRAM- SCHMIDT

Ένα πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η κατασκευή ορθοκανονικής βάσης από μια δεδομένη βάση. Αυτό αντιμετωπίζεται με την μέθοδο Gram- Schmidt :

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και β= $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ μια βάση του. Από αυτήν θα κατασκευάσουμε μια νέα βάση $\beta' = \{u_1, u_2, ...u_n\}$ με την ιδιότητα τα διανύσματα u_i να είναι μεταξύ τους κάθετα, και να είναι μοναδιαία, και τέτοια ώστε $[v_1, v_2, ...v_n] = [u_1, u_2, ...u_n]$

Η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

1) Θέτουμε $u_1 = v_1$

2) Υπολογίζουμε το u_2 ως εξής: $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$

3) Όμοια, Υπολογίζουμε το u_3 : $u_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \dfrac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$ κλπ.

4) Διαιρούμε κάθε διάνυσμα με την νόρμα του για να γίνουν μοναδιαία.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u> Έστω $V = \mathbb{R}^4$, και ο υπόχωρος S που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1,0,1,0), v_2 = (2,2,0,-3), \quad v_3 = (0,3,6,5)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε:

$u_1 = v_1 = (1,0,1,0)$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (2,2,0,-3) - \frac{2}{2}(1,0,1,0) = (1,2,-1,-3)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 =$$

$$(0,3,6,5) - \frac{-15}{15}(1,2,-1,-3) - \frac{6}{2}(1,0,1,0) = (-2,5,2,2).$$

Διαιρούμε κάθε διάνυσμα με την νόρμα του (κανονικοποίηση) και έχουμε:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,-1,-3), w_3 = \frac{1}{\sqrt{37}}(-2,5,2,2)$$

Η ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ QR

Κάθε $m \times n$ πίνακας A με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε A = QR, με Q $m \times n$ ορθογώνιο πίνακα και R $n \times n$ άνω τριγωνικό και αντιστρέψιμο.

(Αυτή η παραγοντοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη τετραγωνικούς πίνακες.)

Ο πίνακας Q υπολογίζεται μέσω της μεθόδου Gram- Schmidt, εφαρμόζοντας την στις στήλες του πίνακα A. Στη συνέχεια, τα διανύσματα που προκύπτουν είναι οι στήλες του Q.

Για να βρούμε τα στοιχεία r_{ij} του πίνακα R χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της διαδικασίας Gram- Schmidt, δηλαδή:

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα R είναι οι νόρμες των διανυσμάτων u_i με τις οποίες διαιρέσαμε στο τέλος της διαδικασίας.

Τα υπόλοιπα στοιχεία r_{ij} είναι ίσα με: $r_{ij} = \dfrac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:</u> Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Θα βρούμε την QR παραγοντοποίηση του A.

Έστω $v_1 = (1,2), v_2 = (3,4)$. Θα κάνουμε ορθοκανονικοποίηση Gram- Schmidt:

Έχουμε $\|v_1\| = \sqrt{5}$.Θέτουμε $u_1 = v_1 = (1,2)$.

Τότε, $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (3,4) - \dfrac{11}{5}(1,2) = (\dfrac{4}{5}, -\dfrac{2}{5})$.

Άρα, $w_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}})$ και $w_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = (\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-1}{\sqrt{5}})$ αφού $\|u_2\| = \dfrac{\sqrt{20}}{5}$.

Επομένως ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Τώρα θα βρούμε τον πίνακα R.

Αυτός είναι άνω τριγωνικός και τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι αριθμοί $\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{20}}{5}$.

Όσο για το στοιχείο r_{12}, θα είναι $r_{12} = \dfrac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$.

Άρα, $R=\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5}\end{bmatrix}$ και ισχύει A = QR.

Εναλλακτικά, ο πίνακας R υπολογίζεται (ευκολότερα) ως εξής:

$A=QR\Rightarrow Q^T A=Q^T QR=R\Rightarrow$

$R=Q^T A$

<u>Εφαρμογή στην επίλυση συστημάτων:</u>

Χρησιμοποιόντας την παραπάνω παραγοντοποίηση λύνουμε εύκολα μεγάλα γραμμικά συστήματα:

$AX=B\Rightarrow QRX=B\Rightarrow RX=Q^T B$

Και αφού ο R είναι άνω τριγωνικός, το σύστημα επιλύεται εύκολα ξεκινώντας από την τελευταία γραμμή και αντικαθιστώντας προς τα πίσω.

<u>Παράδειγμα:</u>

Να λυθεί το σύστημα: $AX=B,\begin{bmatrix}1 & 3 \\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 \\ 10\end{bmatrix}$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, ο πίνακας A παραγοντοποιείται σε A = QR οπότε η AX = B γίνεται

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 \\ 10\end{bmatrix}$$

Αρα $\begin{bmatrix}\sqrt{5} & \frac{11}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{20}}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 \\ 10\end{bmatrix}$, που σημαίνει ότι

$\frac{\sqrt{20}}{5}y=\frac{4}{\sqrt{5}}$ αρα y = 2, και με αντικατάσταση x = 1.