Γραμμική Αλγεβρά ΙΙ

Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

Διάλεξη 23/2/18

Γραμμική Παλινδρόμηση σε πολλές μεταβλητές $y = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_2$

Παράδειγμα 1 *Θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την ελλάτωση της μάζας ενος παγωτού που αποθηκεύεται. Αυτη εξαρτάται απο τις μέρες αποθήκευσης (σε εβδομάδες) και απο την θερμοκρασία αποθήκευσης. Εστω οτι έχουμε τα δεδομένα*

Εβδομάδες αποθήκευσης (t)	1	1	1	2	2	2	3	3	3
Θερμοκρασία αποθήκευσης (c)	-10	-5	0	-10	-5	0	-10	-5	0
Μάζα που χάθηκε (g)	0.15	0.18	0.20	0.17	0.19	0.22	0.20	0.23	0.25

Θέλουμε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο της μορφής

$$g = a_0 + a_1 C + a_2 t$$

οπότε πρέπει να λύσουμε την $Ax = b$ οπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.18 \\ \vdots \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν οτι $Ax = b \Rightarrow A^\top Ax = A^\top b$ ή ισοδύναμα[1]

$$\begin{bmatrix} 9 & 18 & -45 \\ 18 & 42 & -90 \\ -45 & -90 & 375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.79 \\ 3.73 \\ 8.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.174 \\ 0.025 \\ 0.005 \end{bmatrix}$$

Αρα τελικώς το μοντέλο είναι

$$g = 0.174 + 0.025t + 0.005c$$

Επομένως, εαν θέλουμε να προβλέψουμε ποση μάζα παγωτού θα χαθεί εαν αποθηκευτεί για $t = 9$ εβδομάδες σε θερμοκρασία $c = -35^o$, αντικαθιστώντας παιρνουμε $g = 0.224gr$

[1] Η τελευταια ισότητα λέγεται και κανονική εξίσωση.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ- ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ

Ορισμός: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$.

Η απεικόνιση $f : V \times V \to \mathbb{R}$ θα είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο V και θα συμβολίζεται με $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ αν $\forall x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4) $\langle x, x \rangle \geq 0$

5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Αυτός ο χώρος τότε λέγεται **διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο,** ή **Ευκλείδειος χώρος.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

• Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται σε κάθε ζευγάρι διανυσμάτων ως γνωστόν $\langle x, y \rangle = \vec{x}.\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

• Στον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα [-1, 1], τον $C[-1,1]$ ορίζεται ως εσωτερικό γινόμενο το

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και ένα διάνυσμα $x \in V$.

Ονομάζουμε **μέτρο (norm)** του χ τον αριθμό $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

• Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και δύο διανύσματα $x, y \in V$. Αυτά λέγονται **ορθογώνια(κάθετα)** αν και μόνο αν $\langle x, y \rangle = 0$.

• Ένα υποσύνολο S του V λέγεται **ορθογώνιο σύνολο** αν τα στοιχεία του είναι ανα 2 ορθογώνια. Το S λέγεται **ορθοκανονικοποιημένο** αν τα διανύσματα είναι και μοναδιαία. (πχ οι κανονικές βάσεις στους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ κλπ)

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ορισμός: Ορθογώνιος λέγεται ένας $n \times n$ πίνακας Q με ορθοκανονικές στήλες.

Άμεση συνέπεια αυτής της ιδιότητας, είναι ότι ισχύει:

$$Q^T Q = I = QQ^T$$

Δηλαδή ισχύει $Q^T = Q^{-1}$.

Με άλλα λόγια, για ορθογώνιους πίνακες, ο ανάστροφος είναι ο αντίστροφος.

Παράδειγμα: $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω Q ένας πραγματικός πίνακας. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

Α) ο Q είναι ορθογώνιος

Β) Οι γραμμές του σχηματίζουν ορθοκανονικό σύνολο.

Γ) Οι στήλες του σχηματίζουν ορθοκανονικό σύνολο.

• Ο ορθογώνιος πίνακας διατηρεί τα μήκη: $\|Qx\| = \|x\|$ για κάθε διάνυσμα χ.

(Δηλαδή είναι ισομετρίες)

• Ο ανάστροφος πίνακας Q^T είναι και αυτός ορθογώνιος.

• $|\det Q| = 1$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> 2 Κάθε ορθογώνιος 2×2 πίνακας έχει μια από τις μορφές:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ με } \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Απόδειξη: Έστω $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Αφού $|\det A| = 1$, αδ –βγ = 1 ή -1.

Από την σχέση $A^T = A^{-1}$, έχουμε:

• Για detA=1 , δ = α και γ = -β. Από την σχέση detA=1, παίρνουμε : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

• Για detA= - 1 , δ = -α και γ = β. Από την σχέση detA= -1, παίρνουμε : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.