ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Οι πίνακες A κ B είναι όμοιοι εάν αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{A = P\,B\,P^{-1}}$$

Ιδιότητες:

1) Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές (με ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα)
   Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή εαν δυο πίνακες έχουν ιδιες ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα όμοιοι.
2) Det(A)= Det(B)
3) Οι πίνακες A^T, B^T είναι όμοιοι.
4) Trace(A) = trace(B) (αφού tr(AB) = tr(BA))
5) Εαν A^2 = A και A, B όμοιοι ,τότε B^2 = B
6) OI όμοιοι πίνακες έχουν ίδια κανοική μορφή Jordan
7) Εαν A, B όμοιοι, το ίδιο ισχύει και για τους A^κ, B^κ , $\kappa \in \mathbb{N}$

Το πηλίκο του Rayleigh (Συνέχεια)

<u>Παράδειγμα 1</u>: Εστω ο πινακας A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ Με ιδιοτιμές λ = 1, 3 και 6.

Να βρεθεί το μέγιστο της συνάρτησης f(x) = x^T A x, με x^T x = 1.

Ξέρουμε οτι αυτο συμβαίνει για το ιδιοδιάνυσμα τηε μεγαλύτερης ιδιοτιμής, και οτι τι μέγιστο της συνάρτησης ισούται με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή, αρα f_{max} = 6.

Το διάνυσμα χ πού δίνει μέγιστο είναι το x=$(1, 1, 1)^T$, κανονικοποιώντας το διαιρούμε τις συνιστώσες του με την νόρμα του και παίρνουμε $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

<u>**Θεώρημα:**</u> Εστω η f(x) = x^T A x, με x^T x = 1, όπου A συμμετρικός πίνακας θετικά ορισμένος.

Τότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης υπο τον περιορισμό x^T u = 0, όπου u το ιδιοδιάνυσμα της μεγαλύτερης ιδοτιμής, είναι ίση με την επόμενη μεγαλύτερη ιδιοτιμή.

Το διάνυσμα χ πού δίνει μέγιστο είναι το ιδιοδιάνυσμα αυτης της ιδιοτιμής

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το μέγιστο της τετραγωνικής μορφής $9x^2 + 4y^2 + 3z^2$ στη μοναδιαία σφαίρα υπο τον περιορισμό x^T (1, 0 , 0) = 0.

Το διάνυσμα (1, 0 , 0) είναι το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ = 9, οποτε απο το παραπάνω θεώρημα το μέγιστο είναι ίσο με 4 και δίνεται απο το διάνυσμα (0, 1 , 0) που αντιστοιχεί σε αυτήν.

Πράγματι, $9x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 4y^2 + 3z^2$ (γιατι απο τον περιορισμό παίρνουμε χ = 0) και $4y^2 + 3z^2 \leq 4y^2 + 4z^2 = 4$