Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN

Εάν ένας πίνακας δεν διαγωνοποιείται, τότε ο στόχος μας είναι υπολογίσουμε μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, έναν απλούστερο πίνακα, «σχεδόν διαγώνιο» όπως ο παρακάτω πίνακας. Αυτός θα έχει τις ιδιοτιμές του στην διαγώνιο, στην δευτερεύουσα διαγώνιο τα στοιχεία θα είναι 0 ή 1, και τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

$$[T]_\beta = J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται κανονική μορφή Jordan και είναι μοναδική για κάθε πίνακα. Τα διαγώνια block που εμφανίζονται (ένα για κάθε ιδιοτιμή) λέγονται Jordan blocks. Το κάθε block έχει εσωτερικά block, όσα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.

Ο πίνακας A θα είναι όμοιος με μια κανονική μορφή Jordan J αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $J = P^{-1}AP$

Θεώρημα: Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\ldots(x-\lambda_r)^{n_r}$, $p_A(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\ldots(x-\lambda_r)^{m_r}$

αντίστοιχα, όπου λ_ι οι ιδιοτιμές . (Υποθέτουμε πως έχει η πραγματικές ιδιοτιμές)
Τότε για την κανονική μορφή Jordan έχουμε:

<u>Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:</u>

Α) Ο πίνακας Jordan αποτελείται από r το πλήθος Jordan blocks.

Β) Κάθε Jordan block είναι τύπου $n_i \times n_i$

<u>Από το ελάχιστο πολυώνυμο:</u>

Γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένας υποπίνακας J_{ij} τάξης m_i. Οι άλλοι έχουν τάξη $\leq m_i$.

Δ) Ο αριθμός των J_{ij} ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:</u> Να βρεθούν οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan ενός 10×10 πίνακα A με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο αντίστοιχα:

$h_A(x)=(x-3)^5(x-2)^3x^2, \quad p_A(x)=(x-3)^3(x-2)^3x^2$.

Οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan είναι:

$$\begin{bmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&3&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&3&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&2&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε ποια από τις 2 περιπτώσεις αντιστοιχεί στον πίνακα A, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα P (την βάση Jordan). Σε περιπτώσεις μεγάλων πινάκων όπως τώρα, αυτό είναι πολύ χρονοβόρο. Όταν έχουμε πίνακες 3×3, *ή* 4×4, θα υπολογίζουμε και τον πίνακα P.

Για να υπολογιστεί ο P, πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα των ιδιοτιμών, και μετά να υπολογίσουμε αυτά που «λείπουν», τα **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**. Όλα μαζί τα διανύσματα αυτά αποτελούν την βάση Jordan και είναι οι στήλες του πίνακα P.

Ορισμός: Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Ένα διάνυσμα $\vec{x}\neq0$ θα λέγεται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ αν :

$$(A-\lambda I)^p\vec{x}=0, \text{ για κάποιο } p\in\mathbb{N}^*$$

Το σύνολο $K_\lambda(A)=\{x\in V:(A-\lambda I)^p x=0\}$, για κάποιο $p\in\mathbb{N}^*$ λέγεται **γενικευμένος ιδιόχωρος** του A αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ.

Περιλαμβάνει τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής.

Για να βρούμε τα **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα** X_ι ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Αφού βρούμε πρώτα το ιδιοδιάνυσμα X_1 αντίστοιχο της ιδιοτιμής, βρίσκουμε τα επόμενα ως εξής: $(A-\lambda I)X_2 = X_1$, $(A-\lambda I)X_3 = X_2$ κλπ.

<u>Σημείωση 1:</u> Εάν δεν ζητείται να βρεθεί ο πίνακας P ή η κανονική βάση Jordan, τότε δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα.

<u>Σημείωση 2:</u> Εάν ένας πίνακας έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο σώμα K, τότε έχει μια κανονική μορφή Jordan.Στις περιπτώσεις που εξετάζουμε, αυτό σημαίνει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πρέπει να είναι πραγματικές.

<u>Σημείωση 3:</u> Στην περίπτωση που ένας πίνακας διαγωνοποιείται, τότε η κανονική μορφή Jordan ταυτίζεται με τον διαγώνιο πίνακα.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u> Έστω A= $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x) = (x-4)^3$ και ελάχιστο $p_A(x) = (x-4)^2$.

Επομένως θα έχουμε 1 Jordan block (1 ιδιοτιμή) και 1 υποπίνακα 2×2.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Τα ιδιοδιανύσματα είναι της μορφής $\vec{u} = (\kappa+\lambda, \kappa, \lambda)$, πχ τα :

X_1 = (1, 1, 0) και X_2 = (1, 0, 1). Χρειαζόμαστε ακόμα 1 για την βάση Jordan:

$(A-4I)X_3 = X_2$ και λύνοντας το παίρνουμε $X_3 = (1,1,1)$.

(Επιλέξαμε το διάνυσμα X_2, γιατί αν πάρουμε το διάνυσμα X_1, το σύστημα $(A-4I)X_3 = X_1$ είναι αδύνατο, δηλαδή ο ιδιόχωρος του X_1 δεν έχει γενικευμένα ιδιοδιανύσματα).

Επομένως η βάση Jordan είναι η β = {X_2, X3, X_1 }.

Ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $J = P^{-1}AP$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u> Έστω A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_A(x) = p_A(x) = (x-1)^2 (x-5)$.

Επομένως θα έχουμε 2 Jordan block (2 ιδιοτιμές) και 1 υποπίνακα 2×2

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η ιδιοτιμή λ = 5 έχει για ιδιοδιάνυσμα το X_1 =(-4, -3, 9)

Η ιδιοτιμή λ = 1 έχει για ιδιοδιάνυσμα το X_2 =(0, 1, 1)

Το 3^o ιδιοδιάνυσμα που «λείπει» (γενικευμένο) θα το βρούμε ως εξής:

$(A-I)\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$, και βρίσκουμε το X_3 =(-1, 1, 0). Επομένως,

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{και} \quad P^{-1}AP = J.$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u> Έστω B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_B(x) = p_B(x) = (x-1)^2 (x-2)$. Ιδιοτιμές είναι οι λ = 1 (διπλή) και λ = 2.

Επομένως θα έχουμε 2 Jordan block και 1 υποπίνακα 2×2.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Η ιδιοτιμή λ = 2 έχει ιδιοδιάνυσματα της μορφής (0, κ, κ) πχ, το X_1 =(0, 1, 1)

Η ιδιοτιμή λ = 1 έχει ιδιοδιάνυσματα της μορφής (κ, κ, κ) πχ, το X_2 =(1, 1, 1)

Βρίσκουμε και το 3^o ιδιοδιάνυσμα που «λείπει» (το γενικευμένο της ιδιοτιμής λ = 1):

$(A-I)\overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_2}$, και παίρνουμε X_3 =(κ, κ, κ-1), πχ το X_3 =(1, 1, 0).

Επομένως, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{και} \quad P^{-1}BP = J$, με $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5</u> Έστω Z= $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, με χαρ/κο και ελάχιστο πολυώνυμο

$h_Z(x) = x^2(x-2)^2, \quad p_Z(x) = x^2(x-2)$.

Η κανονική μορφή Jordan θα είναι λοιπόν $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ = 0 είναι το X_1 = (1,1 ,1, 1)

Βρίσκουμε και το γενικευμένο της ιδιοτιμής λ = 0: $A\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{x_1}$, και παίρνουμε X_2 =(0, -1, -2, 0). Η ιδιοτιμή λ = 2 έχει 2 γραμ. ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τα X_3 = (1,0 ,0, 1) και X_4 = (-1,1 ,1, 0). Επομένως ο πίνακας P είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = P^{-1}ZP$$

Θεώρημα: Οι όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan.
(Προφανώς με κάποια πιθανή αναδιάταξη των block).
Αντιστρόφως, πίνακες με την ίδια κανονική μορφή Jordan είναι μεταξύ τους όμοιοι.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο όλων των πινάκων διασπάται σε ένα πλήθος «οικογενειών πινάκων» με την ακόλουθη ιδιότητα:
Όλοι οι πίνακες της ίδια ς οικογένειας έχουν την ίδια μορφή Jordan και είναι μεταξύ τους όμοιοι. Οι πίνακες διαφορετικών «οικογενειών» δεν είναι όμοιοι.

Υπενθύμιση: **Οι πίνακες Α κ Β είναι όμοιοι εάν αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε** $B = P^{-1}AP$
Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές (με ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα)