Ο ΨΕΥΔΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ A^+

Έστω η γραμμική εξίσωση Ax = b.
Εαν $b \in R(A)$ τότε η εξίσωση έχει λύση. Εαν ομως $b \notin R(A)$ προφανώς η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση.
Αντί λοιπόν να αναζητούμε ένα x που να μηδενίζει την παράσταση Ax - b αναζητούμε ένα x που να ελαχιστοποιεί την παράσταση $\|Ax - b\|$. Προφανώς αυτό το x εξαρτάται από την επιλογή της νόρμας. Η επιλογή της ευκλείδειας νόρμας μας οδηγεί στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
Για να βρούμε λοιπόν μια προσεγγιστική λύση της εξίσωση $Ax = b$ θεωρούμε την εξίσωση $Ax = P_A b$. Κάθε λύση της εξίσωσης αυτής ονομάζεται γενικευμένη λύση (generalized solution) της Ax = b.

<u>*Θεώρημα1.1*</u> Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $u \in R^n$:

1. $Au = P_A b$
2. $\|Au - b\| \leq \|Ax - b\|$. Για κάθε αλλο x$\in R^n$
3. $A^T Au = A^T b$

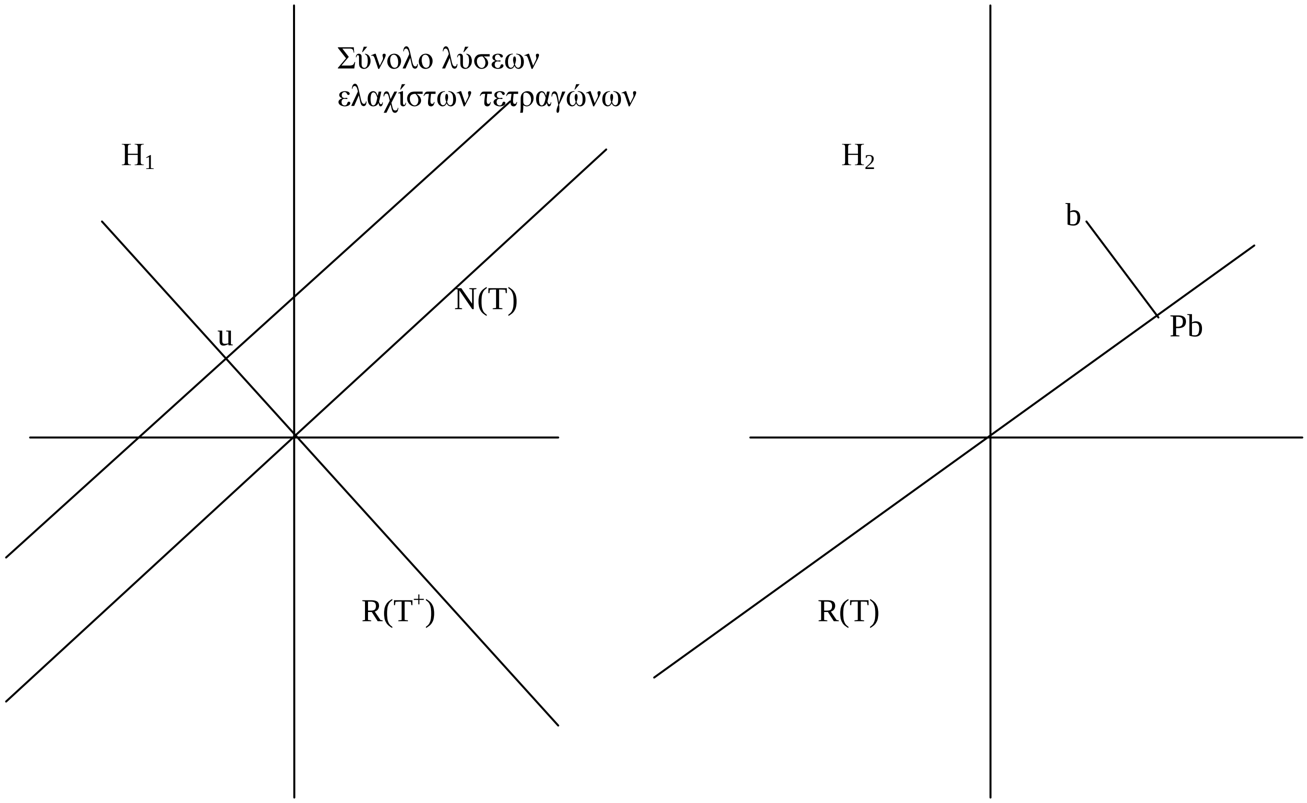
<u>*ΟΡΙΣΜΟΣ 1.*</u> Κάθε διάνυσμα $u \in H_1$ που ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες του θεωρήματος 1.1 θα ονομάζεται λύση ελαχίστων τετραγώνων (*least squares solution)* της εξίσωσης Ax = b.
Το σύνολο των λύσεων αυτών μπορεί να γραφτεί και ως εξής :

$$\{ u \in R^n : A^T Au = A^T b \}$$

και αποδεικνύεται ότι είναι κλειστό και κυρτό. Επομένως έχει ένα μοναδικό στοιχείο με ελάχιστη νόρμα (minimal norm).

<u>*ΟΡΙΣΜΟΣ 2.*</u> Εστω A πινακας, τετραγωνικος η οχι. Η απεικόνιση $A^+ : A^+ b = u$ όπου u είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων με την ελάχιστη νόρμα της εξίσωσης Ax = b λέγεται *γενικευμένος αντίστροφος (generalized inverse)* του πίνακα A.
Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε $A^+ = A^{-1}$
Και, ο A^+ είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ *ο A* είναι αντιστρέψιμος.

Τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν στον χώρο R^2 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οπου Τ θεωρούμε την απεικόνηση που ορίζεται απο τον πινακα Α.



<u>*ΟΡΙΣΜΟΣ 3*</u> [Penrose 1955] Εστω Τ πινακας, τετραγωνικος η οχι. Ο πίνακας T^+ που ικανοποιεί τις συνθήκες :

$$TT^+ = (TT^+)^{\mathrm{T}}$$

$$T^+T = (T^+T)^{\mathrm{T}}$$

$$TT^+T = T$$

$$T^+TT^+ = T^+$$

Λέγεται Γενικευμένος Αντίστροφος (ψευδοαντίστροφος ή Moore-Penrose inverse) του Τ.

Υπάρχει το πολύ ένας πίνακας T^+ που ικανοποιεί τον ορισμό (*P).*

Εστω Α πινακας, τετραγωνικος η οχι. Ο πίνακας A^+ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1) $R(A^+) = R(A^{\mathrm{T}}) = R(A^+ A)$

2) $(AA^T)^+$

3) $(A^+)^T = (A^T)^+$

Επίσης:

<u>Πρόταση 1</u> Έστω Α πίνακας και A^+ ο γενικευμένος αντίστροφός του.

Τότε ισχύει $(A^+)^+ = A$.

<u>Πρόταση 2</u> Αν P είναι προβολή, τότε $P^+ = P$.