Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ- ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

The variance- covariance matrix Σ.

Εστω 2 τυχαίες μεταβλητές, X και Y. Τότε ο πίνακας Σ είναι ο 2 επι 2 συμμετρικός κ θετικά ημιορισμένος πίνακας:

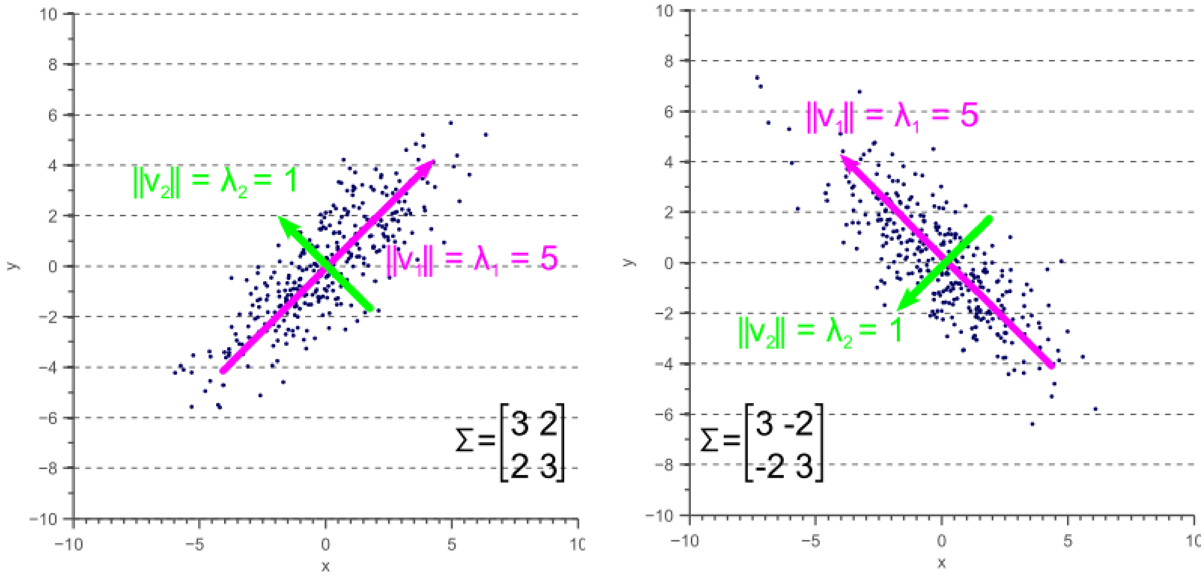
$$\Sigma = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$

Προφανώς τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για ν το πλήθος τυχαίες μεταβλητές, οπου ο πίνακας Σ θα έχει διάσταση ν επι ν. Πχ:

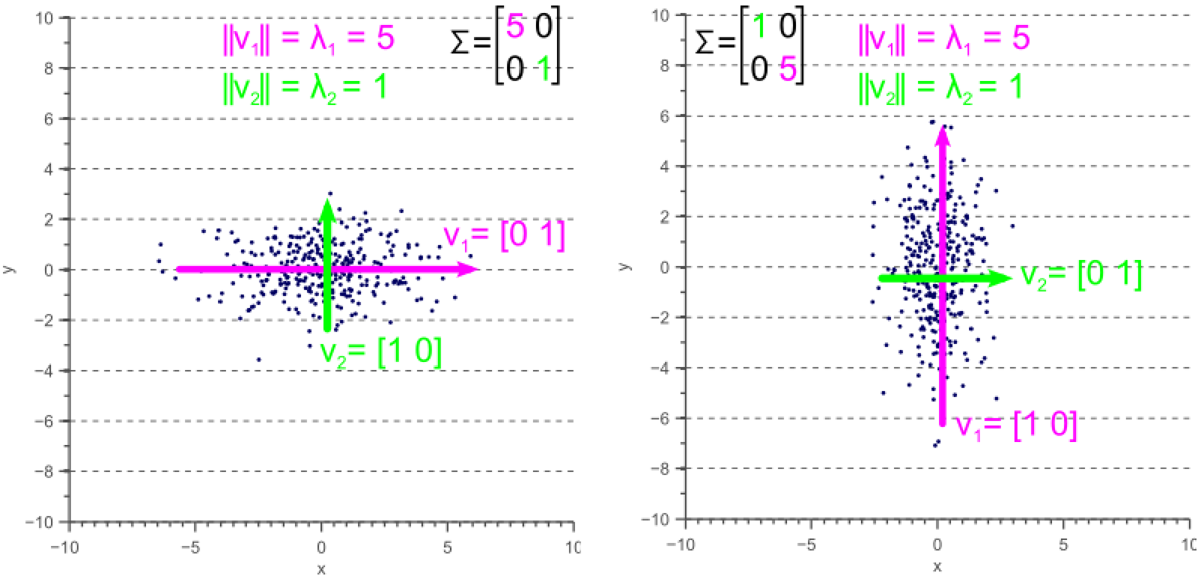
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Cov}(X,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) & \mathrm{Cov}(Y,Z) \\ \mathrm{Cov}(X,Z) & \mathrm{Cov}(Y,Z) & \mathrm{Var}(Z) \end{bmatrix}$$

Εφόσον ο Σ είναι συμμετρικός διαγωνοποιείται (φασματικο θεώρημα) και έχει κάθετα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα.

Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα, η συνδιακύμανση εχει να κάνει με την διαγώνια διασπορά των δεδομένων και είναι ενας δείκτης γραμμικής εξάρτησης των δυο τυχαιων μεταβλητών.



Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε δεδομένα των οποίως ο Σ έχει ίδιες ιδιοτιμές αλλα ανεξάρτητα μεταξύ τους, επομένως η διασπορά είναι στην κατεύθυνση των αξόνων μονο.



ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ ΤΟΥ Rayleigh

Πρόταση:

Η συνάρτηση $\dfrac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x}$ δίνει τιμές μεταξύ $\lambda_{\max}$ και $\lambda_{\min}$, την μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή του A

Απόδειξη:

Έχουμε $A = \lambda_1 \cdot q_1 \cdot q_1^T + \ldots + \lambda_n \cdot q_n \cdot q_n^T$.

Τότε $\dfrac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x} = \lambda_1 \cdot \dfrac{\left(q_1^T \cdot x\right)^2}{x^T \cdot x} + \ldots + \lambda_n \cdot \dfrac{\left(q_n^T \cdot x\right)^2}{x^T \cdot x}$.

Θέτοντας $w_i = \dfrac{\left(q_i^T \cdot x\right)^2}{x^T \cdot x}$ βλέπουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} w_i = \dfrac{x^T \cdot Q \cdot Q^T \cdot x}{x^T \cdot x} = 1$.

Άρα $\dfrac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x} = w_1 \cdot \lambda_1 + \ldots + w_n \cdot \lambda_n$ είναι ένας **σταθμισμένος μέσος των ιδιοτιμών.** Αυτός μεγιστοποιείται αν θέσω μέγιστο ($w_i = 1$) το σταθμό που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή

$\lambda_{\max}$. Τότε $\frac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x} = \lambda_{\max}$ [1]. Αντίστοιχα ελαχιστοποιείται αν θέσω μέγιστο ($w_i = 1$) το σταθμό που αντιστοιχεί στη ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{\min}$. Τότε $\frac{x^T \cdot A \cdot x}{x^T \cdot x} = \lambda_{\min}$.

[1] Το παίρνω θέτοντας $x =$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή.