ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΣΤΗΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Έστω $f(x)$ μια τετραγωνική μορφή και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου συμμετρικού πίνακα Α.

Τότε, η μέγιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα (δηλαδή για τα διανύσματα με νόρμα ίση με 1, $\|x\| = 1$) είναι ίση με την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η μέγιστη τιμή αυτή επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

Αντίστοιχα, η ελάχιστη τιμή της $f(x)$ πάνω στην μοναδιαία σφαίρα είναι ίση με την μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα Α.

Η ελάχιστη τιμή αυτή επίσης επιτυγχάνεται για τα διανύσματα τα οποία είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής, για τα οποία ισχύει $\|x\| = 1$.

<u>*Παράδειγμα 9*</u> Έστω η τετραγωνική μορφή $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 2xy + 2xz$.

Ο αντίστοιχος πίνακας της είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Τα διανύσματα της μοναδιαίας σφαίρας, είναι αυτά που ικανοποιούν την συνθήκη : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Θα βρούμε τα ακρότατα πάνω στην μοναδιαία σφαίρα.

Ο πίνακας αυτός έχει για ιδιοτιμές τις: $\lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}, \lambda_3 = 0$.

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, είναι τα $x_1 = (\sqrt{2}, 1, 1),\ x_2 = (-\sqrt{2}, 1, 1),\ x_3 = (0, -1, 1)$.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, η μέγιστη τιμή της παράστασης $2xy + 2xz$ είναι $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Η ελάχιστη τιμή της είναι - $\sqrt{2}$ και επιτυγχάνεται στα σημεία $\pm(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα τα κανονικοποιήσαμε, για να έχουν νόρμα ίση με 1.

<u>*Σημείωση:*</u> Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν σε σφαίρα οποιαδήποτε ακτίνας α, και τότε το μέγιστο (ή ελάχιστο) είναι ίσο με $\lambda_{\max}.a$ ($\lambda_{\min}.a$). (Με α >0)

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που μας δίνουν τα σημεία, θα έχουν μήκος $\|x\| = a$.