ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΣΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας στην μελέτη των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών είναι μέσω των τετραγωνικών μορφών.
Με την βοήθεια των τετραγωνικών μορφών μπορούμε να πάρουμε ικανές συνθήκες για την ύπαρξη τοπικών ακροτάτων, και να χαρακτηρίσουμε το είδος τους.
Για να γίνει αυτό, πρέπει να βρούμε τον πίνακα της $2^{ης}$ παραγώγου στα κρίσιμα (στάσιμα) σημεία της συνάρτησης, και να βρούμε αν αυτός είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, ή αόριστος.
Πιο συγκεκριμένα : Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 2 φορές παραγωγίσιμη στο στάσιμο σημείο ξ. Τότε:

- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι θετικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο ξ.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αρνητικά ορισμένος, τότε η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αόριστος, και ισχύει $\det(f''(\xi)) \neq 0$, τότε το σημείο ξ είναι σημείο σέλας.
- Αν ο πίνακας $f''(\xi)$ είναι αόριστος, και ισχύει $\det(f''(\xi)) = 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφασίσουμε για την συμπεριφορά της f στο σημείο ξ.

Στην περίπτωση που η f είναι μια τετραγωνική μορφή, το σημείο (0,0) (ή το (0, 0, 0)) είναι πάντα στάσιμο σημείο της. Όταν μάλιστα ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι αντιστρέψιμος, είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο.
Έτσι, το σημείο αυτό θα είναι πάντα είτε ολικό μέγιστο, είτε ολικό ελάχιστο, είτε σημείο σέλας.
Ένα απλό τέτοιο παράδειγμα θα δούμε παρακάτω:

Παράδειγμα1 Έστω η τετραγωνική μορφή $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2x^2 - 4xy + 5y^2$.

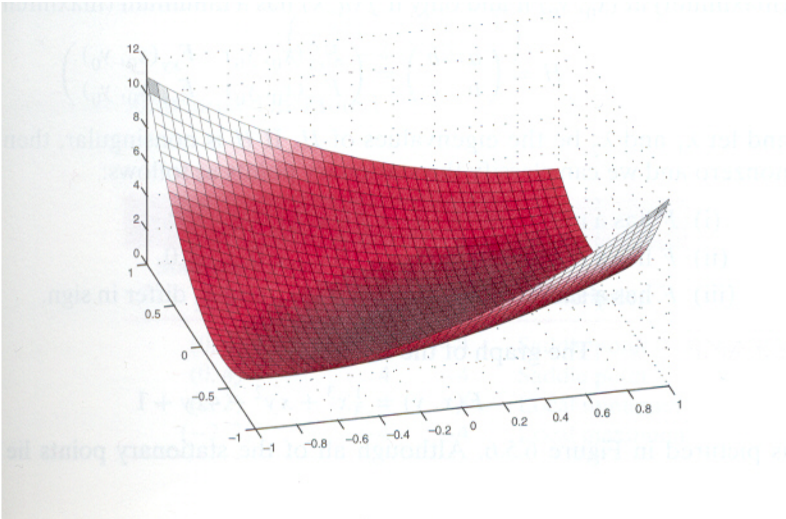
Ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης είναι :

$f_x = 4x - 4y,\ f_y = -4x + 10y$.

Μηδενίζοντας τις, παίρνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ -4x + 10y = 0 \end{cases}$, το οποίο έχει μοναδική λύση το σημείο O(0,0). Αυτό είναι και το μοναδικό στάσιμο σημείο.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Βλέπουμε πως δεν μπορούμε από το σχήμα να αποφανθούμε αν το σημείο O(0,0) είναι ολικό ελάχιστο ή σημείο σέλας.

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A, και είναι λ = 6 και λ = 1.

Επομένως ο A είναι θετικά ορισμένος, άρα το (0,0) είναι ολικό ελάχιστο.

Φυσικά μπορούσαμε να βρούμε ότι ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και βάσει του θεωρήματος 2, υπολογίζοντας τις ορίζουσες A_1 και A_2 που είναι θετικές.

Γενικότερα, στην περίπτωση των συναρτήσεων 2 μεταβλητών, κάνουμε τα εξής:

1) Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

2) Βρίσκουμε τα σημεία που μηδενίζονται οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, έστω (x_0, y_0).

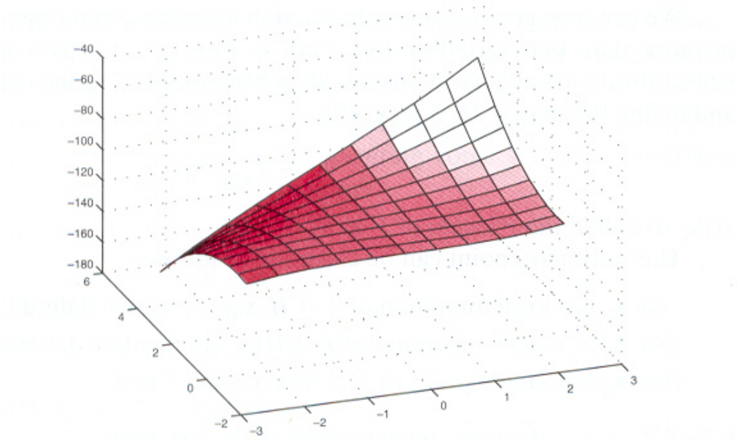
3) Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα 2^{η}ς παραγώγου:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \text{ στα σημεία } (x_0, y_0).$$

4) Βρίσκουμε αν ο πίνακας Α είναι θετικά, αρνητικά ορισμένος ή αόριστος και έτσι βγάζουμε το συμπέρασμα για τα στάσιμα σημεία.

Παράδειγμα 2 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 4xy + 1$.

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οι μερικές παράγωγοι είναι : $f_x = x^2 + y^2 - 4y, \quad f_y = 2xy - 4x$.

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα, και παίρνουμε χ = 0 , y = 0 ή 4 και $y = 2, x = \pm 2$.

Έτσι τα στάσιμα σημεία είναι τα Ο(0,0), Α(0,4), Β(2,2) και Γ(-2, 2).

Για να ταξινομήσουμε τα στάσιμα σημεία, βρίσκουμε τον πίνακα της $2^{ης}$ παραγώγου:

$$A = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 - 4 \\ 2y_0 - 4 & 2x_0 \end{bmatrix}$$

Για καθένα από τα σημεία (x_0, y_0) έχουμε λοιπόν:

Στάσιμο σημείο	**λ₁**	**λ_λ**	**Περιγραφή**
Ο(0,0)	4	-4	Σημείο σέλας
Α(0,4)	4	-4	Σημείο σέλας
Β(2,2)	4	4	Ολικό ελάχιστο
Γ(-2, 2)	-4	-4	Ολικό μέγιστο

__Παράδειγμα 3__ Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + xz - 3\cos y + z^2$.

Η συνάρτηση είναι C^2 τάξης στο $\mathbb{R}^3$ και οι πρώτες μερικές παράγωγοι της είναι οι

$f_x = 2x + z, \quad f_y = 3\sin y, f_z = x + 2z$

Μηδενίζουμε και λύνουμε το σύστημα, και παίρνουμε $x = z = 0$ και $y = n\pi$, με $n \in \mathbb{Z}$. (Παίρνουμε ξεχωριστές περιπτώσεις για $n = 2k, \quad n = 2k+1$).

Υπολογίζουμε τον πίνακα $2^{ης}$ παραγώγου που είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3\cos y & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

• Στην $1^{η}$ περίπτωση , έστω $x_0 = (0, 2k\pi, 0)^T$.

Τότε, ο πίνακας Α στο σημείο x_0 είναι : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι λ = 3 (διπλή) και λ = 1, επομένως είναι θετικά ορισμένος. Έτσι, στα σημεία $x_0 = (0, 2k\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, το οποίο είναι ίσο με $f(0, 2k\pi, 0) = -3$.

• Στην $2^{η}$ περίπτωση , έστω $x_0 = (0, 2(k+1)\pi, 0)^T$.

Τότε, ο πίνακας Α στο σημείο x_0 είναι : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Οι ιδιοτιμές του είναι οι λ = 3 , λ = -3 και λ = 1, επομένως είναι αόριστος..

Έτσι, στα σημεία $x_0 = (0, 2(k+1)\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο σέλας.