ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ -ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Καμπύλες 2^{ου} βαθμου στο επίπεδο

Παράδειγμα 5 Έστω η τετραγωνική μορφή $f(x) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$.

Αφού την φέρουμε σε κανονική μορφή, θα εξετάσουμε γεωμετρικά την συνθήκη $f(x) = 8$.

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές λ =2 και λ = 4.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (κανονικοποιημένα) είναι τα $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ και

$v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.Έτσι ο ορθογώνιος πίνακας μετασχηματισμού είναι ο

$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & \sin 45 \\ -\sin 45 & \cos 45 \end{bmatrix}$. Θέτουμε $X = QY$, και η τετραγωνική μορφή

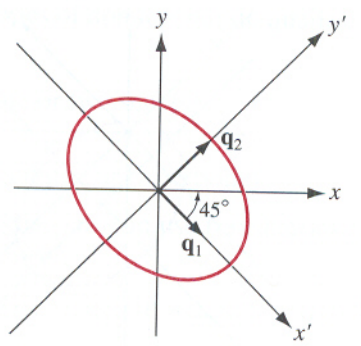
γίνεται: $f(x) = Y^T \Delta Y = 2y_1^2 + 4y_2^2$.

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x) = 2y_1^2 + 4y_2^2 = 8$, η οποία μετασχηματίζεται στην

$\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1$ που είναι μια έλλειψη.

Όπως έχουμε αναφέρει, αφού η ορίζουσα του πίνακα Q είναι ίση με 1, ο πίνακας παριστάνει στροφή κατά 45^o δεξιόστροφα από τον άξονα χχ'(με την φορά του ρολογιού).

Αυτό το βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα:



Η γενικη μορφη των τετραγωνικών μορφών:

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+k=0$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμες λ_1 λ_2 του αντίστοιχου πίνακα, τον διαγωνοποιούμε, θετουμε $X=QY$ ως συνήθως, οποτε $\begin{bmatrix} d_1 & e_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}Q$

και παίρνουμε την διακρίνουσα:

$$\Delta=\frac{d_1^{\ 2}}{4\lambda_1}+\frac{e_1^{\ 2}}{4\lambda_2}-k$$

Εάν:

$\Delta \neq 0$ τότε η καμπύλη είναι έλλειψη η υπερβολή.

$\Delta = 0$ τοτε είναι ζεύγος ευθειών η σημείο, η αρχή των αξόνων.

Μια ιδιοτιμη είναι 0,είναι παραβολή.

Και οι 2 ιδιοτιμές 0, είναι ευθεία.

ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και F μια τετραγωνική μορφή, $F:V\to\mathbb{R}$ Αυτή λέγεται:

1. Θετικά ορισμένη (αντίστοιχα **αρνητικά ορισμένη**) αν $F(x)>0$ $(F(x)<0)$ για κάθε $x\in V, \mu\varepsilon\ x\neq 0$.

2. Θετικά ημιορισμένη αν $F(x)\geq 0$ και υπάρχουν διανύσματα $x\in V, \mu\varepsilon\ x\neq 0$ τέτοια ώστε F(x) = 0.

3. Αόριστη αν μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές.

4. Εκφυλισμένη αν υπάρχει κάποιο $x\in V, \mu\varepsilon\ x\neq 0$ τέτοιο ώστε F(x) = 0.

Προφανώς από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι μια θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή είναι εκφυλισμένη.

Θεώρημα 1: Μια τετραγωνική μορφή $F:V\to\mathbb{R}$ είναι θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές της (του αντίστοιχου πίνακα) είναι θετικές (αντίστοιχα αρνητικές).

Προφανώς από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι θετικά και οι αρνητικά ορισμένοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, γιατί το 0 δεν είναι ιδιοτιμή τους.

Ένα ισοδύναμο θεώρημα είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 2: Έστω ότι μια τετραγωνική μορφή $F:V \to \mathbb{R}$ έχει πίνακα Α ως προς κάποια βάση. Τότε, θα είναι $F(x) = x^T Ax$. Θεωρούμε τις ορίζουσες :

$$A_1 = a_{11}, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ κλπ.}$$

Τότε:

1. Η F θα είναι **θετικά ορισμένη** αν και μόνο αν $A_1 > 0,\ A_2 > 0,\quad A_3 > 0...$

2. Η F θα είναι **αρνητικά ορισμένη** αν και μόνο αν

$$A_1 < 0,\ A_2 > 0,\quad A_3 < 0...\quad (-1)^n A_n > 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα δεν αρκεί για να αποφανθούμε αν ενας πίνακας είναι θετικά η αρνητικά ορισμένος, ή αόριστος.

Παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος αλλά έχει ορίζουσα ίση με 4.

Ορισμός: Έστω ότι από το πλήθος των n μη μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα Α, οι p είναι θετικές και οι q (με q = n – p) αρνητικές. Τότε, ο αριθμός s = p – q λέγεται **dείκτης** ή **υπογραφή** της F. **sig(f) = p – q**

Παράδειγμα: Έστω ένας πίνακας Α με χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x) = (x-6)(x-2)(x+1)(x-4)$. Τότε, οι ιδιοτιμές του είναι 6, 2, -1 και 4. Επομένως, S = 3 – 1 = 2.

<u>Θεώρημα Sylvester (Αδράνειας)</u>

Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και F μια τετραγωνική μορφή, $F:V \to \mathbb{R}$. Τοτε υπάρχει μια βάση του χώρου που την αναπαριστά με διαγώνιο πίνακα, και μάλιστα θα έχει τον ιδιο αριθμό θετικών καταχωρήσεων p και τον ίδιο αριθμό αρνητικών q με την αρχική.

Ισχύει: **sig(f) = p – q, rank(f) = p+q**