Θεώρημα: Έστω Α ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Τότε οι Α, A^{-1} έχουν τα ιδια ιδιοδιανύσματα και για τις ιδιοτιμές λ ισχύει $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1})$

Θεώρημα Schur: Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας. Τότε αυτός τριγωνοποιείται πάντα στο $\mathbb{C}$, ενώ στο $\mathbb{R}$ είναι ομοιος με καποιον ανω τριγωνικό πίνακα εάν οι ιδιοτιμες του είναι όλες πραγματικές. Ο πινακας μεταβασης είναι ορθομοναδιάιος (αντίστοιχα ορθογώνιος)

Φασματικό Θεώρημα: Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται με τον πίνακα μετάβασης U να είναι ορθογώνιος.

$$A = UDU^T, \quad D = diagonal$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα K. (συνήθως το $\mathbb{R}$) Μια απεικόνιση $f : V \to K$ λέγεται **γραμμική μορφή** επί του V αν για κάθε $x, y \in V,\ \lambda, \mu \in K$ ισχύει:

$$f(\lambda\chi + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

(Τα απλούστερα παραδείγματα γραμμικής απεικόνισης είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής και ο τελεστής παραγώγισης).

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω σε ένα σώμα K (συνήθως το $\mathbb{R}$). Μια απεικόνιση $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ λέγεται **διγραμμική μορφή** επί του $\mathbb{R}$ αν για κάθε $x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$i)\Phi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\Phi(x, z) + \mu\Phi(y, z)$$
$$ii)\Phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\Phi(x, y) + \mu\Phi(x, z)$$

<u>*Παράδειγμα 1*</u> Αν $V = \mathbb{R}^2$, διγραμμική μορφή είναι η απεικόνιση:

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 - 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 5x_2y_2$$

Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Αποδεικνύεται ότι αν $\Phi(x,y)$ είναι μια διγραμμική μορφή, τότε αυτή μπορεί να γραφτεί και με την μορφή : $\Phi(x,y)=X^T AY$, όπου A ο πίνακας της διγραμμικής μορφής και X, Y οι πίνακες στήλες των διανυσμάτων x, y ως προς την βάση του V. Μια διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική** αν ισχύει $\Phi(x,y)=\Phi(y,x) \quad \forall x,y\in V$. Σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Ένα παράδειγμα συμμετρικής διγραμμικής μορφής στον χώρο των πολυωνύμων μέχρι $2^{ου}$ βαθμού είναι το ακόλουθο:

Ορίζουμε $\Phi:\mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}, \quad \Phi(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες του ορισμού, καθώς και ότι $\Phi(p,q)=\Phi(q,p)$

Ορισμός: Έστω ένας διανυσματικός χώρος V, πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ και Φ μια συμμετρική διγραμμική μορφή.

Η απεικόνιση $F:V\to\mathbb{R} \quad :F(X)=\Phi(x,x)=\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}$ λέγεται **τετραγωνική μορφή** αντίστοιχη της Φ.

<u>*Παράδειγμα 2*</u> Αν $V=\mathbb{R}^2$, τετραγωνική μορφή είναι η απεικόνιση:

$f(x)=2x^2+y^2-6xy$, με αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα A=$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Έτσι, $f(x)=X^T AX = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2+y^2-6xy$

<u>*Παράδειγμα 3*</u> Αν $V=\mathbb{R}^3$, τετραγωνική μορφή είναι η απεικόνιση:

$$Q(x)=x^2-3y^2+z^2-4xy+2yz+6xz, \quad ή \quad Q(x)=[x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι κάθε συμμετρικός $n\times n$ πίνακας ορίζει μια τετραγωνική μορφή $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με $F(x)=X^T AX$.

Επειδή όλοι οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται και μάλιστα από έναν ορθογώνιο πίνακα Q, ισχύει $A = Q\Delta Q^T$, θέτοντας $X = QY$ έχουμε :

$$F(x) = (QY)^T A(QY) = Y^T QAQ^T Y = Y^T \Delta Y$$

που ισούται με $\lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του A.

Η παραπάνω έκφραση της F(x) λέγεται **κανονική μορφή** της F(x).

Παράδειγμα 3 Έστω $V = \mathbb{R}^3$, και η τετραγωνική μορφή F : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

F(x) $= 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$. (Θεωρούμε X = (x_1, x_2, x_3))

Θα υπολογίσουμε την κανονική μορφή της και τον πίνακα μετασχηματισμού Q που την ανάγει στην κανονική της μορφή.

Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι ο A= $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι λ = 1, λ = 3 και λ = 4.

Επομένως, η κανονική μορφή που προκύπτει είναι η

F(x) = $y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2$, όπου Y = (y_1, y_2, y_3).

Ο ορθογώνιος πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων (κανονικοποιημένα και σε στήλες) είναι:

$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, και ο μετασχηματισμός που κάνει την αναγωγή στην κανονική μορφή ο X= QY.

Παράδειγμα 4 Έστω $V=\mathbb{R}^3$, και η τετραγωνική μορφή F : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{F(x)} = 6x_1^{\ 2} + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 .$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι ο A= $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι λ = 3, λ = 6 και λ = 9.

Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα X_1 = (2, 2, -1), X_2 = (-1, 2,2) και X_3 = (2, -1, 2).

Αφού τα ιδιοδιανύσματα κανονικοποιηθούν, βρίσκουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, και ο αντίστοιχος μετασχηματισμός αναγωγής ο X= QY.

Επομένως, η κανονική μορφή που προκύπτει είναι η

$$\mathrm{F(x)} = 3y_1^{\ 2} + 6y_2^{\ 2} + 9y_3^2 .$$