# ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ- ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

**Ορισμός**

Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο p(x) λέγεται **ελάχιστο πολυώνυμο** του Α αν ισχύουν τα παρακάτω:

1) p(A) = 0

2) Έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα

3) Κάθε άλλο πολυώνυμο q(x) με q(A)= 0 έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο με του p(x).

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μοναδικό για κάθε πίνακα.

Από τον ορισμό αυτόν αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις:

• Ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου δεν υπερβαίνει τον βαθμό του χαρ/κου του πολυωνύμου.

• Το χαρ/κο πολυώνυμο ενός πίνακα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο του.

• Το χαρ/κο πολυώνυμο ενός πίνακα και το ελάχιστο πολυώνυμο του έχουν τις ίδιες ρίζες, αλλά με πολλαπλότητα πιθανώς διαφορετική. Συνεπώς, το p(x) περιέχει όλους τους γραμμικούς παράγοντες του $h_A(x)$ .

• Εάν το χαρ/κο πολυώνυμο $h_A(x)$ ενός $n \times n$ πίνακα Α έχει η διακεκριμένες ρίζες, τότε $h_A(x) = (-1)^n p(x)$, όπου p(x) το ελάχιστο πολυώνυμο του.

• Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα είναι πολύ χρήσιμο στην διαδικασία διαγωνοποίησης ενός πίνακα.

**Θεώρημα:** Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν η το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Α .

3) Το ελάχιστο πολυώνυμο του Α είναι γινόμενο διακεκριμένων παραγόντων.,

δηλαδή της μορφής : $p(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_k)$

Παραδείγματα διαγωνοποίησης:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\quad \lambda=0(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}),\quad \lambda=3, P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\\ \frac{2}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε ότι Δ = $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το p(x)= x( x-3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 :

Δίνεται ο πίνακας Α= $\begin{bmatrix}4&4&4\\6&6&5\\-6&-6&-5\end{bmatrix}$. Να βρεθεί πίνακας Μ τέτοιος ώστε $M^2$ = Α.

Λύση:

Ο πίνακας Α έχει ιδιοτιμές 0, 1 και 4. Επομένως διαγωνοποιείται.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι : (-1, 1, 0), (0, -1, 1) και (1 ,2 ,-2).

Έτσι, Α= $P\Delta P^{-1}$, δηλαδή Α= $\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&2\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\2&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&2\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0&1&1\\2&2&3\\1&1&1\end{bmatrix}$ = $P\Delta' P^{-1}\, P\Delta' P^{-1}$, με Δ' = $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

Έτσι, Α= $M^2$, με Μ= $P\Delta' P^{-1}$ = $\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&1\\-2&-2&-1\end{bmatrix}$.