Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Tutorial 7
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

27 Απριλίου 2018

1. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \text{κουκουβάγιες} & \text{ποντίκια} \\ \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{κουκουβάγιες} \\ \text{ποντίκια} \end{array}$$

που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος κουκουβάγιες - ποντίκια σ΄ ενα οικολόγικο σύστημα. Δείτε τι συμβαίνει στο σύστημα σε βάθος χρόνου.
Λύση:

Το παραπάνω σύστημα απότελει ενα *δυνάμικο σύστημα* του οποιου η εξέλιξη περιγράφεται απο την αναδρόμικη εξίσωση

$$x_{k+1} = Ax_k$$

Ας βρόυμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0.5 - \lambda & -0.4 \\ -0.2 & 1.1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \lambda_i = 1.02, 0.58$$

με αντίστοιχα ιδιοδιάνυσματα $\boldsymbol{u} = [10, 13]$ και $\boldsymbol{v} = [5, 1]$ που είναι βάση του χώρου και αρα τον παράγουν. Ετσι θα έχουμε

$$x_k = c \cdot 1.02 \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot 0.58 \cdot \boldsymbol{v} \Rightarrow$$

Αρα

$$x_n = c \cdot 1.02^n \cdot \boldsymbol{u} + d \cdot 0.58^n \cdot \boldsymbol{v}$$

Και αφήνοντας το n να τρέξει στο άπειρο προκύπτει οτι $x_n = c \cdot 1.02^n \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = 1.02x_{n-1}$. Επομένως σε βάθος χρόνου το σύστημα θα ισορροπήσει σε μια αναλογία 10 κουκουβάγιες προς 13 ποντίκια.

◁

2. Να βρέθει η ευθεία ελαχίστων τετράγωνων $y = b_0 + b_1 x$ των σημείων Α(0,1) , Β(1,1) , Γ (2,2) και Δ(3,2).
Λύση:

Το παραπάνω μοντέλο σε μορφη πινάκων έχει την μορφή $Y = Xb$ οπου

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Ετσι έχουμε

$$Xb = Y \Rightarrow X^\top Xb = X^\top Y \Rightarrow \hat{b} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y = X^\dagger Y =$$

με

$$X^\top X = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{αρα} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Αρα τελικά η ευθεία ελαχίστων τετράγωνω ειναι η $y = 0.9 + 0.4x$.

$\triangleleft$

3. Αποφανθειτε για την ορθότητα των παρακάτω προτάσεων.
(α) Αν $A = A^\top$, $A\boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{u}$ και $A\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{v}$ τοτε το $\boldsymbol{u}$ ειναι κάθετο στο $\boldsymbol{v}$.
(β)Ο $A_{n\times n}$ είναι ορθογώνιος και διαγωνοποιησιμος αν και μονο αν ειναι συμμετρικός.
(γ) Αν $A_{n\times n}$ είναι συμμετρικός τότε έχει διαφορετικές ιδιοτιμες λ_i.

Λύση:

(α) Σωστό, αφού απο το φασμάτικο θεώρημα γνωρίζουμε οτι τα ιδιοδιάνυσματα είναι κάθετα.
(β) Σωστό, αφού για τηνμια κατευθυνση της συνεπάγωγης ($\Rightarrow$), αν A διαγώνοποιήσιμος και ορθογώνιος τοτε έχουμε οτι $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Ετσι για τον $A^\top$ θα έχουμε οτι

$$A^\top = \left(PDP^\top\right)^\top = (P^\top)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A$$

Άρα A συμμετρικός. Για ανάποδη κατευθυνση ($\Leftarrow$) προκύπτει άμεσα απο το φασματικό θεώρημα.
(γ) Λάθος. Ευκολά μπορεί να βρεί κάνεις ένα αντιπαράδειγμα.

$\triangleleft$

4. Μας δίνόνται τα παρακάτω δεδομένα.

19	22	6	3	2	20
12	6	9	15	13	5

Να γίνει η ανάλυση κυρίων συνιστωσών (PCA).

Λυση:
Ευκολα μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα των μέσων ως εξης

$$M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Μετά αφαιρούμε τον μέσο απο κάθε x_i.
Αρα τα δεδομένα μας γίνονται ως εξης

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 10 & -6 & -9 & -10 & 8 \\ 2 & -4 & -1 & 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Απ' τον πίνακα B προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης ως εξής

$$\Sigma = \frac{1}{N-1}BB^\top = \begin{bmatrix} 86 & -27 \\ -27 & 16 \end{bmatrix}$$

οπου παρατηρούμε οτι η συνόλικη διακύμανση είναι ίση με 102.
Ας αρχίσουμε τώρα την ανάλυση σε κύριες συνιστώσες, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα Σ. Εχουμε ότι

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda_1 = 95.2, \lambda_2 = 6.8$$

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή ($\lambda_1 = 95.2$) είναι η μεγαλύτερη συνιστώσα. Το αντιστοιχο ιδιοδιάνυσμα της προκύπτει οτι είναι το $u_1 = [0.946, \quad -0.322]^\top$. Αξίζει να σημειώσουμε οτι η συνόλικη διακύμανση δεν έχει μεταβληθεί ($\lambda_1 + \lambda_2 = 102$).
Ενδείκτικα, αναφέρουμε οτι ένας δείκτης που θα λάμβανε υπόψιν τα δεδομένα θα είναι ο

$$y = 0.946x_1 - 0.322x_2$$

5.
Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε οτι ο ψευδοαντίστροφος του είναι ο

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Λυση:
Αρκεί να αποδείξουμε οτι ισχύουν οι 4 ιδιότητες του ορισμού του ψευδοαντιστρόφου,

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad AA^\dagger = (AA^\dagger)^T, \quad A^\dagger A = (A^\dagger A)^T$$

που αποδεικνύονται εύκολα με πράξεις.