Γραμμική Αλγεβρα ΙΙ

Tutorial 3
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

9 Μαρτίου 2018

1. Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Λυση:
Έχουμε οτι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} -\lambda & 8 \\ -2 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -16 \Rightarrow \lambda = \pm 4i$$

Παρατηρούμε οτι αφού η ορίζουσα ηταν αρνητική είναι λογικό να μην περιμένουμε ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$.
Για $\lambda = 4i$ έχουμε:

$$A\boldsymbol{u} = 4i\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 8y & = & 4xi \\ -2x & = & 4yi \end{array} \right\}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραπάνω 2 εξισώσεις είναι ταυτόσημες αφού η μια ειναι πολλαπλάσιο της άλλης. Συνεπώς παίρνοντας μονο την πρώτη έχουμε $y = \frac{1}{2}xi$. Άρα το ιδιοδιάνυσμα ειναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{2}xi \end{bmatrix} \quad \text{π.χ. το} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = -4i$ έχουμε:

$$A\boldsymbol{u} = -4i\boldsymbol{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -4i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} 8y & = & -4xi \\ -2x & = & -4yi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & -\frac{1}{2}xi \\ y & = & \frac{x}{2i} \end{array} \right\}$$

οπου με λίγη προσοχή μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι και αυτές οι δυο εξισώσεις είναι ταυτόσημες, κι έτσι παίρνοντας μόνο την πρώτη έχουμε $y = -\frac{1}{2}xi$ και άρα το ιδιοδιάνυσμα ειναι

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{1}{2}xi \end{bmatrix} \quad \text{π.χ. το} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$$

◁

2. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του.
(β) Διαγωνοποιείται ;
(γ) Αν ναι, να γίνει η διαγωνοποιήση.

Λύση:
(α) Αφαιρώντας λ απο την διαγώνιο του A, παιρνόντας την ορίζουσα και εφαρμόζοντας τον κανόνα του Sarrus έχουμε

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -2 & -1\\ 2 & -\lambda & 1\\ 2 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\cdots=\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$$

Παρατηρούμε οτι το $\lambda=2$ είναι ρίζα. Ετσι εφαρμόζοντας το σχήμα Horner έχουμε

1	-7	16	-12	2
	2	-10	12	
1	-5	6	0	

Αρα βγάζουμε οτι $\lambda^2-5\lambda+6=0$ που έχει ρίζες τις $\lambda=2$ και $\lambda=3$. Ετσι εν τέλει, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda=2$ (διπλή) και $\lambda=3$. Για τα ιδιοδιανυσματα για την $\lambda=3$ έχουμε

$$A\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{u}\Rightarrow\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}4x-2y+z & = & 3x\\ 2x+z & = & 3y\\ 2x-2y+3z & = & 3z\end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε οτι οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι ταυτόσημες. Απο την τελευταία προκύπτει οτι $x=y$, όπου αν το αντικαταστήσουμε στην δεύτερη έχουμε $x=z$ και έτσι προκύπτει οτι $x=y=z$. Οπότε το ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa\\ \kappa\\ \kappa\end{bmatrix},\quad\kappa\in\mathbb{R},\quad\text{π.χ}\quad\text{το}\quad\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

Για την $\lambda=2$ με την ίδια λογική έχουμε

$$A\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{u}\Rightarrow\cdots\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}4x-2y+z & = & 2x\\ 2x+z & = & 2y\\ 2x-2y+3z & = & 2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccc}2x-2y+z & = & 0\\ 2x-2y+z & = & 0\\ 2x-2z+z & = & 0\end{array}\right\}$$

οπου παρατηρούμε οτι και οι 3 εξισώσεις είναι ταυτόσημες. Ετσι δουλευοντας μόνο με μια απο αυτες προκύπτει οτι $z=2y-2x$ και αρα το ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ 2y-2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\kappa\\ \mu\\ 2\kappa-2\mu\end{bmatrix},\quad\kappa,\mu\in\mathbb{R},\quad\text{π.χ}\quad\text{το}\quad\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}\quad\text{ή}\quad\text{το}\quad\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

(β) Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ίση με την γεωμετρική και ίση με 2, συνέπως ο πινακας είναι απλής δομής και άρα διαγωνοποιείται.
(γ) Για την διαγώνοποιηση γνωρίζουμε οτι $A=P\Delta P^{-1}$, όπου P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων σε στήλες και Δ ο διαγώνιος πίνακας που έχει τις αντίστοιχες ιδιοτιμές. Εχουμε λοιπόν οτι

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\quad\text{και}\quad\Delta=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

◁

3. Ποιές απο τις παρακάτω προτάσεις ειναι σώστες; Ποιές λάθος; Αιτιολογήστε την απάντηση σας.
(α) Αν ο $A_{3\times 3}$ έχει ιδιοτιμες τις $\lambda = 1, 1, 2$, ο A αντιστρέφεται.
(β) Αν ο A έχει ιδιοτιμες τις $\lambda = -1, 1, 2$, ισχυεί οτι $\det(A) = -2$.
(γ) Αν $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -13 & -5 \end{bmatrix}$ τοτε ισχυεί οτι $A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = I$.

Λύση:
(1) Σωστο, αφου $\lambda_i \neq 0$.
(2) Λάθος, αφου δεν γνωρίζουμε την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών. Θα μπορούσε κάποια ιδιοτιμή να εμφανίζεται περισσότερες απο μια φορές.
(3) Για να αποφανθουμε, ας βρούμε τις ιδιοτιμές του A. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ -13 & (-5-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(-5-\lambda)+26 = 0 \Rightarrow \lambda^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Αρα

$$P_A x = x^2 + 1 \xRightarrow{C-H} A^2 + I = \mathbb{O} \Rightarrow A^2 = -I$$

Ετσι αν αντικαταστήσουμε την τελευταία ισοτητα, σε εκείνη που θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι σωστή ή λάθος έχουμε

$$A^{2008} + A^{2006} + A^{2004} = (A^2)^{1004} + (A^2)^{1003} + (A^2)^{1002} = I - I + I = I.$$

Αρα είναι σωστή.

◁

4. Αν $A^3 = A$, να δείξεται οτι το φάσμα του A είναι $\sigma(A) = \{-1, 1, 0\}$.

Λύση:
Γνωρίζουμε ότι ισχυεί $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \Rightarrow A^n\boldsymbol{u} = \lambda^n\boldsymbol{u}$. Εχουμε λοιπόν οτι

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A\boldsymbol{u} & = & \lambda\boldsymbol{u} \\ A^n\boldsymbol{u} & = & \lambda^n\boldsymbol{u} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda\boldsymbol{u} & = & \lambda^3\boldsymbol{u} \\ (\lambda-\lambda^3)\boldsymbol{u} & = & \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

$$\xRightarrow{\boldsymbol{u}\neq 0} \lambda - \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda(1-\lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1, \quad \lambda = 0$$

Αρα $\sigma(A) = \{-1, 1, 0\}$.

◁