ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΠΙΝΑΚΑ:

Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F . Για χ στο F, ορίζεται το πολυώνυμο (ως προς χ) : $h_A(x) = \det(A - xI_n)$.

Πόρισμα 1: Ο βαθμός του χαρ/κου πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα Α είναι *η*.

Πόρισμα 2: Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας έχει το πολύ η ιδιοτιμές.

•Αλγεβρική πολλαπλότητα **m (λ)** μιας ιδιοτιμής λ ονομάζουμε την πολλαπλότητα της θεωρούμενη ως ρίζα του χαρ/κου πολυωνύμου.

• Γεωμετρική πολλαπλότητα **d (λ)** μιας ιδιοτιμής λ ονομάζουμε την διάσταση του ιδιόχωρου V(λ) .

• Η ιδιοτιμή λ θα λέγεται **ισορροπημένη** αν **m (λ) = d (λ).**

• Ένας πίνακας Α καλείτα**ι απλής δομής** αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι ισορροπημένες.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3</u> (Πίνακας απλής δομής)

Έστω Α= $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Δηλαδή η ιδιοτιμή 1 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. [**m (1) =2]** και η ιδιοτιμή 5 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1. [**m (5) =1]**

Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

• Στην ιδιοτιμή λ = 5, αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $u_1 = (k, k, k)$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση 1. Άρα **d (5) =1.** Η ιδιοτιμή 5 είναι **ισορροπημένη.**

Μία βάση του χώρου αυτού είναι το διάνυσμα X_1 = (1,1,1).

• Στην ιδιοτιμή λ = 1, αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $u_2 = (\kappa, \lambda, -\kappa - 2\lambda)$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος έχει διάσταση 2. Άρα **d (1) =2.** Η ιδιοτιμή 1 είναι **ισορροπημένη.**

Μία βάση του χώρου αυτού είναι τα διανύσματα X_2 = (1,0,-1) και X_3 = (2,-1,0).

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 3</u> Δύο όμοιοι τετραγωνικοί πίνακες Α και Β (δηλ. $B = P^{-1}AP$, με P αντιστρέψιμο) έχουν ίδιο χαρ/κο πολυώνυμο, και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές.

Επίσης, αν X, Y τα ιδιοδιανύσματα των Α, Β αντίστοιχα, που προκύπτουν από την ίδια ιδιοτιμή, τότε $X = PY$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4</u>

Θα κάνουμε μια εφαρμογή του θεωρήματος 3 :

Στο παράδειγμα 2 είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές λ = 3 και λ = 2 (διπλή) με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα X_3 = (κ, κ, -2κ) και X_2 = (λ, 0, 0).

Παίρνουμε τον πίνακα $B = P^{-1}AP$, όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ο Β υπολογίζεται με πράξεις: $B = \begin{bmatrix} 4.5 & -0.5 & -4.5 \\ -1.25 & 1.75 & 2.75 \\ 0.75 & -0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του Β είναι 3, 2 και 2 όπως και του Α.

Τα ιδιοδιανύσματα του Β είναι Y_3 = (-0.92, 0.19,-0.32) και Y_2 =(-0.81, -0.4, -0.4).

Βλέπουμε ότι $P * Y_3$ = (-0.5, -0.5, 1) = X_3

και $P * Y_2$ = (-1.6, 0, 0) =X_2 .

ΘΕΩΡΗΜΑ CAYLEY- HAMILTON

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x)=\sum_{i=0}^{v} a_k x^k = a_v x^v + a_{v-1}x^{v-1}+...+a_1 x + a_0$.

Έστω επίσης ένας $n\times n$ πίνακας A επί ενός σώματος F

Ο πίνακας $p(A)=a_v A^v + a_{v-1}A^{v-1}+...+a_1 A + a_0 I$ λέγεται **τιμή του πολυωνύμου p(x)** στον πίνακα A.

<u>Θεώρημα Cayley –Hamilton</u>
Κάθε τετραγωνικός πίνακας μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Οι εφαρμογές αυτού του θεωρήματος είναι πολλές, οι κυριότερες είναι :

• Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} (αν υπάρχει) συναρτήσει του αρχικού πίνακα A

• Υπολογίζουμε μεγάλες δυνάμεις του A, καθώς και πολυώνυμα του A μεγάλου βαθμού.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα.

Το χαρ/κο του πολυώνυμο είναι $(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0$,

επομένως από το Θεώρημα Cayley –Hamilton ισχύει $\mathrm{A}^3-7\mathrm{A}^2+16\mathrm{A}-12\mathrm{I}=0$.

• Να υπολογιστεί ο πίνακας A^{-1} συναρτήσει του αρχικού πίνακα A :

Λύνουμε ως προς I, και παραγοντοποιούμε: $\mathrm{I}=\frac{1}{12}\left(\mathrm{A}^2-7\mathrm{A}+16\mathrm{I}\right)\mathrm{A}$, επομένως

αφού $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{I}$ έχουμε ότι $\mathrm{A}^{-1}=\frac{1}{12}\mathrm{A}^2-\frac{7}{12}\mathrm{A}+\frac{4}{3}\mathrm{I}$.

Πράγματι, αν κάνουμε τις πράξεις έχουμε ότι

$$\frac{1}{12}\mathrm{A}^2 - \frac{7}{12}\mathrm{A} + \frac{4}{3}\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.333 & -0.083 \\ 0 & 0.666 & 0.166 \\ 0 & -0.333 & 0.166 \end{bmatrix} = \mathrm{A}^{-1}$$

<u>Υπενθύμιση:</u> Ο αντίστροφος ενός 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (εάν υπάρχει) είναι ο :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

<u>Ορισμός</u>

Έστω Α ένας $n\times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ο Α λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος προς έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}AP = \Delta \text{, με } \Delta \text{ διαγώνιο.}$$

<u>Θεώρημα:</u> Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο Α είναι διαγωνοποιήσιμος

2) Υπάρχουν η το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του Α .

<u>Σημείωση:</u> Ο διαγώνιος πίνακας Δ έχει στην διαγώνιο τις ιδιοτιμές του Α.

Ο πίνακας P έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του Α .

<u>Πόρισμα:</u> Αν ένας $n\times n$ πίνακας έχει η διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε διαγωνοποιείται.

• Ένας πίνακας μη απλής δομής δεν διαγωνοποιείται.

Εάν ένας πίνακας διαγωνοποιείται και λ μια ιδιοτιμή του, τότε **m (λ) = d (λ)**

(δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του είναι ισορροπημένες, ή ισοδύναμα είναι απλής δομής)

• Εάν ένας πίνακας Α διαγωνοποιείται, τότε ισχύουν:

$$A^{-1} = P\Delta^{-1}P^{-1} \quad \text{και} \quad A^k = P\Delta^k P^{-1},\ k\in\mathbb{Z}$$

• Οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται πάντα.

• Το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του πίνακα.

• Το γινόμενο των ιδιοτιμών ισούται με την ορίζουσα του πίνακα.

Γενικά, μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Η διαγωνιοποιησιμότητα συνδέεται με τα ιδιοδιανύσματα. Η αντιστρεψιμότητα συνδέεται με τις ιδιοτιμές.

Παραδείγματα διαγωνοποίησης:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0(\delta\iota\pi\lambda\acute{\eta}), \quad \lambda = 3, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Έτσι, έχουμε ότι $\Delta = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,