ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ- ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F.

Ιδιοτιμή ονομάζεται ένας αριθμός λ αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα στήλη $\vec{u}$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}$$

Η σχέση αυτή μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί και $(A - \lambda I)\vec{u} = 0$.

Το σύνολο των ιδιοτιμών λέγεται **φάσμα σ(A)** του πίνακα A.

Το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ.

<u>**ΘΕΩΡΗΜΑ 1**</u> Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας επί ενός σώματος F και $\lambda \in F$.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1) Ο $\lambda \in F$ είναι ιδιοτιμή του A.

2) Το ομογενές γραμμικό σύστημα $(A - \lambda I)X = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις

3) Ο πίνακας $A - \lambda I$ είναι μη αντιστρέψιμος

4) **Η ορίζουσα του $A - \lambda I$ είναι μηδενική**.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1</u>

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Τότε, $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix}$.

Έτσι, det($A - \lambda I$)=0 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ....\lambda = 3, \lambda = -2$.

Άρα, σ(A) = {-2, 3}.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = -2:*

$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \Leftrightarrow A\vec{u} = -2\vec{u}$, επομένως $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής (χ, -2χ).

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα της λ = -2 είναι της μορφής $\vec{u} = \begin{pmatrix} \kappa \\ -2\kappa \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(-2) = \{(\kappa, -2\kappa), \kappa \in \mathbb{R}\}$.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = 3:*

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow A\vec{u}=3\vec{u}$$, επομένως $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+2y=0\\ 2x-4y=0\end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής (2y, y).

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα της λ = 3 είναι της μορφής $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\kappa\\ \kappa\end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(3)=\{(2\kappa,\kappa),\ \kappa\in\mathbb{R}\}$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2</u>

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$. Τότε, $A-\lambda I=\begin{bmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}$.

Έτσι, det($A-\lambda I$)=0 $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow....(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0$.

Επομένως, οι ιδιοτιμές είναι οι λ = 3 και λ = 2 (διπλή ρίζα)

Λέμε ότι η ιδιοτιμή λ = 2 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 2. [**m (2) =2].**

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ = 3:*

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow A\vec{u}=3\vec{u}$$, επομένως $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=0\\ -2y-z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής $\begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa\\ -2\kappa\end{pmatrix}$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα της λ = 3 είναι το $\vec{u}=\begin{pmatrix}\kappa\\ \kappa\\ -2\kappa\end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(3)=\{(\kappa,\kappa,-2\kappa),\ \kappa\in\mathbb{R}\}$.

• *Ιδιοδιάνυσμα για την λ =2:*

$$A\vec{u}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow A\vec{u}=2\vec{u}$$, επομένως $\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0\\ -y-z=0\\ 2y+2z=0\end{cases}$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις , της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα της λ = 2 είναι το $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Αντίστοιχος υπόχωρος: $V_A(2) = \{(\lambda, 0, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u> Τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
Ειδικά για συμμετρικούς πίνακες, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

<u>ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>

• Διαγώνιοι πίνακες: $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Οι ιδιοτιμές βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο,

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

• Τριγωνικοί (άνω ή κάτω) πίνακες: $\Gamma = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται και πάλι στην κύρια διαγώνιο, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1$.

Εάν το 0 είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα, τότε αυτός δεν αντιστρέφεται και αντιστρόφως