## 8. Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.1)

Οι  που γνωρίσαμε είναι σύνολα εφοδιασμένα με πρόσθεση  και πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό .

Γι’ αυτές τις πράξεις ισχύει ένα σύνολο κανόνων:

1. 
2. 
3.  δηλ. 
4.   
5. 
6. 
7. 
8. 

**Ορισμός:** Ένα σύνολο  εφοδιασμένο με μια πράξη + (πρόσθεση) και ένα πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, τέτοιους ώστε να ισχύουν οι παραπάνω κανόνες λέγεται **διανυσματικός χώρος.**

Η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι τόσο γενική που συμπεριλαμβάνει χώρους όπως:

* το σύνολο των ακολουθιών ,
* το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων }
* το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων
* το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού .

Εδώ όμως θα περιοριστούμε στους  ως διανυσματικούς χώρους.

### Υπόχωροι

**Ορισμός:** Έστω  ένας διανυσματικός χώρος και  με  και  έχει τις εξής ιδιότητες:

* αν 
* αν  

Τότε  ονομάζεται **υπόχωρος** του .

#### Σημείωση:

* Το  διότι .
* Ο πιο μικρός υπόχωρος του  είναι ο .
* Ο πιο μεγάλος υπόχωρος του  είναι ο .

#### Παραδείγματα:

**Είναι υπόχωροι οι παρακάτω?**

* στον 

 και 







**ΟΧΙ** διότι αν  τότε 





* στον 



**ΟΧΙ** διότι 

*  ή  ευθεία που διέρχεται από 0.

**ΝΑΙ** διότι:  αν 

και 

*  ή  ευθεία που δε διέρχεται από 0.

**ΟΧΙ** διότι δεν περιέχει το 0.

* στον  ή : επίπεδο που διέρχεται από 0.

 **ΝΑΙ** (βλ. παρακάτω)

και γενικότερα στον :

**Αν  τότε  υπόχωρος**

**Απόδειξη:** Αν  

 



και 

### Χώρος στηλών ενός mxn πίνακα Α

π.χ. 

* Ψάχνουμε όλα τα  για τα οποία ισχύει: το σύστημα  έχει λύση.
* Αλλά τότε:  , δηλαδή .

Στο παράδειγμά μας, λοιπόν, τα  με αυτή την ιδιότητα είναι τα σημεία του επιπέδου που περνά από το 0, το  και .

Γενικώς: Αν  ένας  πίνακας τότε **χώρος στηλών** του είναι το σύνολο των  (των δεξιών πλεύρων) για τα οποία υπάρχει  με .

Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το  των στηλών του πίνακα. Συμβολίζεται με :



**Είναι υπόχωρος**, καθώς γράφεται ως .

Άλλη απόδειξη:

* Έστω .
  + Τότε υπάρχουν .
  + Προθέτοντας παίρνουμε  και άρα .
* Παρόμοια από  πολλαπλασιάζονατς με  παίρνουμε
  +  και άρα .

Άλλα παραδείγματα:

* . Τότε 
* . Τότε 
*  μη ιδιόμορφος. Τότε το  έχει λύση για κάθε . Άρα 

### Ο Μηδενόχωρος ενός mxn πίνακα Α

**Ορισμός:** Το σύνολο των  με  λέγεται **μηδενόχωρος** του . **Είναι υπόχωρος** του .

**Απόδειξη:** (Είναι υπόχωρος)



* Αν 



* 

#### Παραδείγματα

* αν  το .
  + Άρα ο  αποτελείται από όλα τα  της μορφής . Είναι δηλαδή ο  μια ευθεία που περνά από το 0 και το .
* Αν  τότε 
* Αν  τότε (από Gauss)  και το  έχει λύσεις τα  της μορφής . Δηλαδή ο  είναι δηλαδή μια ευθεία που περνά από το 0 και το . Ή .
*  μη ιδιόμορφος. Τότε το  έχει μία και μοναδική λύση, την . Άρα .