## 8. Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.1)

Οι  που γνωρίσαμε είναι σύνολα εφοδιασμένα με πρόσθεση  και πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό .

Γι’ αυτές τις πράξεις ισχύει ένα σύνολο κανόνων:

1. 
2. 



1.  δηλ. 



1.   



1. 



1. 
2. 
3. 

**Ορισμός:** Ένα σύνολο  εφοδιασμένο με μια πράξη + (πρόσθεση) και ένα πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, τέτοιους ώστε να ισχύουν οι παραπάνω κανόνες λέγεται **διανυσματικός χώρος.**

Η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι τόσο γενική που συμπεριλαμβάνει χώρους όπως:

* το σύνολο των ακολουθιών ,
* το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων }
* το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων
* το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού .

Εδώ όμως θα περιοριστούμε στους  ως διανυσματικούς χώρους.



### Υπόχωροι

**Ορισμός:** Έστω  ένας διανυσματικός χώρος και  με  και  έχει τις εξής ιδιότητες:



* αν 
* αν  

Τότε  ονομάζεται **υπόχωρος** του .

#### Σημείωση:

* Το  διότι .
* Ο πιο μικρός υπόχωρος του  είναι ο .
* Ο πιο μεγάλος υπόχωρος του  είναι ο .

#### Παραδείγματα:

**Είναι υπόχωροι οι παρακάτω?**



* στον 

 και 









**ΟΧΙ** διότι αν  τότε 







* στον 





**ΟΧΙ** διότι 



*  ή  ευθεία που διέρχεται από 0.



**ΝΑΙ** διότι:  αν 



και 



*  ή  ευθεία που δε διέρχεται από 0.



**ΟΧΙ** διότι δεν περιέχει το 0.



* στον  ή : επίπεδο που διέρχεται από 0.



 **ΝΑΙ** (βλ. παρακάτω)



και γενικότερα στον :



**Αν  τότε  υπόχωρος**



**Απόδειξη:** Αν  



 







και 



### Χώρος στηλών ενός mxn πίνακα Α



π.χ. 



* Ψάχνουμε όλα τα  για τα οποία ισχύει: το σύστημα  έχει λύση.



* Αλλά τότε:  , δηλαδή .



Στο παράδειγμά μας, λοιπόν, τα  με αυτή την ιδιότητα είναι τα σημεία του επιπέδου που περνά από το 0, το  και .



Γενικώς: Αν  ένας  πίνακας τότε **χώρος στηλών** του είναι το σύνολο των  (των δεξιών πλεύρων) για τα οποία υπάρχει  με .



Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το  των στηλών του πίνακα. Συμβολίζεται με :







**Είναι υπόχωρος**, καθώς γράφεται ως .



Άλλη απόδειξη:



* Έστω .



* + Τότε υπάρχουν .



* + Προθέτοντας παίρνουμε  και άρα .



* Παρόμοια από  πολλαπλασιάζονατς με  παίρνουμε



* +  και άρα .



Άλλα παραδείγματα:



* . Τότε 



* . Τότε 



*  μη ιδιόμορφος. Τότε το  έχει λύση για κάθε . Άρα 



### Ο Μηδενόχωρος ενός mxn πίνακα Α



**Ορισμός:** Το σύνολο των  με  λέγεται **μηδενόχωρος** του . **Είναι υπόχωρος** του .



**Απόδειξη:** (Είναι υπόχωρος)





* Αν 







* 



#### Παραδείγματα



* αν  το .



* + Άρα ο  αποτελείται από όλα τα  της μορφής . Είναι δηλαδή ο  μια ευθεία που περνά από το 0 και το .



* Αν  τότε 



* Αν  τότε (από Gauss)  και το  έχει λύσεις τα  της μορφής . Δηλαδή ο  είναι δηλαδή μια ευθεία που περνά από το 0 και το . Ή .



*  μη ιδιόμορφος. Τότε το  έχει μία και μοναδική λύση, την . Άρα .