## 13. Ορθογώνιοι υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.1)

Υπενθύμιση: για  λέμε .

**Πρόταση**. Έστω  μη-μηδενικά με . Τότε τα  **θα είναι ανεξάρτητα**.

**Απόδειξη**.

Έστω .

Πολ/ζω από αριστερά με  για κάποιο . Παίρνουμε



Αριστερά μόνο  είναι διάφορο του μηδενός εξ αιτίας της καθετότητας των . Έτσι παίρνουμε:



Και καθως  πρέπει . Παρομοίως παίρνουμε

.

Θέλουμε να ορίσουμε πότε **δύο υπόχωροι θα είναι ο οθογώνιοι** ο ένας στον άλλον.

**Απάντηση**. Όταν κάθε στοιχείο του ενός είναι ορθογώνιο σε κάθε στοιχείο του άλλου.

**Ορισμός.** Έστω  υπόχωροι. Θα λέμε  ορθογώνιος (ή κάθετος) στον  και συμβολίζουμε  τότε και μόνο τότε όταν:

.

**Παραδείγματα**

* Στον  δύο ευθείες που περνάνε από το 0 κάθετες μεταξύ τους.
* Στον  ένα επίπεδο και μια ευθεία που περνάνε από το 0 κάθετα μεταξύ τους.
* Στον  δύο επίπεδα **δεν** μπορούν να είναι ορθογώνια καθως θα έχουν ως τομή μία ευθεία και για να είναι ορθογώνια θε έπρεπε όλα τα στοιχέια της ευθείας να είναι κάθετα στον εαυτό τους.

**Πρόταση**. Έστω  υπόχωροι και  παράγει  και  παράγει . Τότε:

* αν  **θα έπεται** 
* αν για κάθε  έχουμε **θα έπεται** 

**Απόδειξη**.

Αν  θα έχουμε

 και .

και  καθώς .

Παρόμοια αν  **για κάθε** .

**Παραδείγμα**

Στον  : Έστω .

Εύκολα ελέγχουμε

* ,
* ,
* .

**Πρόταση**. Έστω . Τότε:

α) χώρος γραμμών   Μηδενόχωρο  

α) χώρος στηλών   Αριστερό μηδενόχωρο  

**Απόδειξη**.

α) Έστω . Τότε .

Που ισοδυναμεί με .

Και άρα .

α) Έστω . Τότε .

Που ισοδυναμεί με .

Και άρα .

**Ερώτημα**: Έστω  υπόχωροι με .

* Μήπως εκτός από τα στοιχεία του  υπάρχουν και άλλα στοιχεία του  που να ειναι ορθογώνια στον , ή
* μήπως, αντίθετα, **ο  περιέχει όλα τα** στοιχεία του  που είναι **ορθογώνια στον ;**

Π.χ. στο παράδειγμά μας έχουμε , αλλά ο  δεν περιέχει όλα τα στοιχεία του  που είναι ορθογώνια στον : υπάρχουν και τα στοιχεί της  που είναι ορθογώνια στο !

**Ορισμός:** Έστω  υπόχωρος. Ορίζουμε **το ορθογώνιο συμπλήρωμα του ,** που το συμβολίζουμε με  ως εκείνο τον υπόχωρο του  που περιέχει όλα τα στοιχεία του  που είναι ορθογώνια στον , δηλ.



**Ερώτημα**: Έστω  υπόχωροι με . Πως μπορώ να ξέρω **αν είναι ορθογώνια συμπληρώματα** ο ένας του άλλου?

**Απάντηση**: Η επόμενη πρόταση λέει ότι **είναι ορθογώνια συμπληρώμτα αν οι διαστάσεις τους αθροίζονται σε .**

**Πρόταση**. Έστω  υπόχωροι με  και με

.

Τότε:

α) αν  βάση του  και  βάση του , τότε θα έπεται πως  βάση του .

β) Για κάθε  υπάρχουν  τέτοια ώστε .

γ)  και .

**Σημείωση.** Θα δούμε ότι  η προβολή του  στο , ενώ .

**Απόδειξη**.

α) Καθώς το πλήθος των συμπίπτει με τη διάσταση του  αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητα. Έστω



Θέτοντας  και  έχουμε:



Αλλά καθως και  έπεται  και με αυτό από τη παραπάνω ισότητα παίρνουμε:



Αλλά από  με την ανεξάρτησία των  παίρνουμε  και παρομοίως  από .

β) Αφού  είναι βάση του  οποιοδήποτε  γράφεται ως

.

Θέτουμε  και .

Τότε προφανώς .

γ) Έστω  με . Θα δείξουμε .

Από β) γράφουμε το  ως  με .

Από  έπεται όμως .

Διότι , καθως  και άρα .

Άρα .

**Θεμελιώδες θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας, Μέρος ΙΙ**.

Έστω . Τότε οι θεμελιώδεις υπόχωροι του  είναι ανα ζεύγη ορθογώνια συμπληρώματα ο ένας του άλλου:

α) χώρος γραμμών ,  =  

α) χώρος στηλών ,  =  

**Απόδειξη**. Οι διαστάσεις αθροίζονται:



