## 2. Ευθείες και επίπεδα στον Rn

### Ευθεία στον R2

* Η ευθεία είναι ένα σύνολο σημείων.
* Θέλουμε να περιγράψουμε αυτό το σύνολο με τη μορφή μιας εξίσωσης σημείων/διανυσμάτων. Να πούμε δηλαδή ότι η **ευθεία είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την τάδε εξίσωση** (σημείων/διανυσμάτων)

#### Ευθεία που διέρχεται από το μηδέν.

* Για να ορίσω μια ευθεία  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων χρειάζεται άλλο ένα προκαθορισμένο σημείο  από το οποίο να διέρχεται η ευθεία.
* Όλα τα υπόλοιπα σημεία  της ευθείας θα είναι ακριβώς **εκείνα τα**  **που ???**



 G





* Άρα για να είναι ευθεία που διέρχεται από το **0** και το **** η  πρέπει να είναι το σύνολο των σημείων  που είναι πολλαπλάσια του , δηλαδή



<https://www.geogebra.org/m/KnFAZ8fa>

<https://www.geogebra.org/m/skj88vSN>

* Σε αυτή την εξίσωση το ρόλο του  μπορεί να τον παίξει και οποιοδήποτε άλλο (αυθαίρετα επιλεγμένο) σημείο της ευθείας:

Δηλαδή, αν  και άρα  για κατάλληλο , τότε



* Το σύνολο των πολλαπλασίων ενός στοιχείου / διανύσματος / σημείου  λέγεται γραμμική θήκη του  και το γράφουμε και ως . Δηλαδή



Δέστε ότι για κάθε συγκεκριμένη τιμή του  παίρνω και ένα άλλο συγκεκριμένο σημείο  της . Όταν αφήσω το  να «τρέχει» στους πραγματικούς αριθμούς τότε το  τρέχει πάνω στη .

<https://www.geogebra.org/m/skj88vSN>

* Σημειώστε ότι, όπως και προηγουμένως, αν  και άρα  για κατάλληλο , τότε



####  Ευθεία που δε διέρχεται από μηδέν .



* Ψάχνω εξίσωση που ορίζει την ευθεία  που διέρχεται από κάποιο προκαθορισμένο σημείο  και είναι παράλληλη κάποιας  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Υπθέτω επιπλέον ότι , αλλιως προφανώς μπορώ να πάρω .



 G



 G



* Τότε όλα τα υπόλοιπα σημεία  της ευθείας  θα είναι ακριβώς **εκείνα τα**  **που γράφονται ως άθροισμα κάποιο σημείου**  **με το **. Άρα



* Καθώς τα σημεία της  είναι τα πολλαπλάσια του  μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτή την ιδιότητα στη παραπάνω εξίσωση:



<https://www.geogebra.org/m/KnFAZ8fa>

<https://www.geogebra.org/m/skj88vSN>

* Τα παραπάνω μπορούν να γραφτούν και ως εξίσωση συνόλων



Δηλαδή: κάθε σημείο της  προκύπτει ως άθροισμα κάποιου σημείου της  με το . Αυτό σημαίνει ότι η ** προκύπτει από μετατόπιση της  .**

<https://www.geogebra.org/m/ZkzF7UmX>

* Το ρόλο του  σε αυτές τις εξισώσεις μπορεί να τον παίξει οποιοδήποτε άλλο στοιχείο . Δηλαδή έχουμε

 για οποιοδήποτε .



 G



 G





* Εάν προτιμάμε τώρα να προδιορίσουμε εναλλακτικά την ευθεία  ως εκείνη που διέρχεται από δύο σημεία .
* τότε αυτή θα πρέπει να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από το 0 και το 

**

 G

**

 G

**

* Άρα:



* Αν προτιμώ μπορώ να πάρω σε αυτό τον ορισμό οποιαδήποτε δύο (μη ταυτόσημα) σημεία της   στη θέση των 

#### Ευθεία στον Rn

Το υποσύνολο  ονομάζεται ευθεία αν υπάρχουν  τέτοια ώστε όλα τα σημεία  της  να γράφονται ως , για κάποιο .



* γράφω και



Π.χ. στον R3

<https://www.geogebra.org/m/sb2cedpp>

### Σημείωση Προφανώς η  είναι ευθεία, καθως είναι ειδική περίπτωση του παραπάνω ορισμού: πάρε  .

### Επίπεδο στον R3



Ας θεωρήσουμε διανύσματα στο χώρο. Aκριβώς, όπως τα διανύσματα του επιπέδου, μπορούν να ταυτιστούν με τα σημεία του επιπέδου, του δηλαδή, έτσι και τα διανύσματα στο χώρο ταυτίζονται με τα σημεία του χώρου, που περιγράφονται από τον .

#### Επίπεδο που διέρχεται από 0

* Ας προσπαθήσουμε πάλι να περιγράψουμε με μια εξίσωση τα σημεία του επιπέδου που διέρχονται από το 0 και κάποια σημεία  και  του χώρου. (Υποθέτω επιπλέον  δεν είναι πολλαπλάσιο του ).



















μ























* Ένα σημείο  αυτού του επιπέδου διακρίνεται από την ιδιότητα ότι μπορώ να το γράψω σαν

 = πολ/σιο του  + πολ/σιο του 

ή: υπάρχουν κατάλληλα  και  τέτοια ώστε



Λέμε: το  γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των  &  με συντελεστές τα .

<https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN>

<https://www.geogebra.org/m/HTdWt2YD>

* Για να βεβαιωθώ για την παραπάνω ιδιότητα μπορώ να φέρω παράλληλο του  μέσα από το . αυτή θα τμήσει κάπου την ευθεία που διέρχεται από το **0** και το . Εκεί θα βρίσκεται το ζητούμενο πολλαπλάσιο του . Παρομοίως μπορώ να βρω και το πολλαπλάσιο του .

Το επίπεδο  δίνεται από το σύνολο των σημείων που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των  & :



* Αυτό το σύνολο λέγεται γραμμική θήκη των  και γράφεται και ως .
* Δηλαδή 

Αντίστοιχα με την ευθεία μπορούμε τώρα να πούμε ότι **αφήνοντας δύο πραγματικούς αριθμούς  να «τρέχουν» πάνω στον *R*** (και χρησιμοποιώντας αυτούς τους δύο ως συντελεστές σε γραμμικούς συνδυασμούς των ) τα σημεία που παίρνουμε  «τρέχουν» πάνω σε ένα επίπεδο (ή «απλώνουν» ένα επίπεδο, εξού και “Span”).

Και πάλι η γραφή του επιπέδου  ως  δεν είναι μοναδική: θα μπορούσα στη θέση των  &  να χρησιμοποιήσω δύο οποιαδήποτε άλλα μη συγγραμικά στοιχεία του .

#### Επίπεδο που δε διέρχεται από το 0

Έστω  το επίπεδο που διέρχεται από κάποιο  και είναι παράλληλο του .























Τα σημεία του επιπέδου αυτού προκύπτουν αν προσθέσω  στα σημεία του .

Αν δηλαδή «μετατοπίσω» το  κατά .



<https://www.geogebra.org/m/wbBUwENF>

<https://www.geogebra.org/m/HTdWt2YD>

* Αν θέλω το επίπεδο που περνά από τα σημεία , όπου  δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία, αυτό θα είναι παράλληλο με το επίπεδο .

Περιγράφεται λοιπόν εναλλακτικά ως ως:



* Οποιαδήποτε 3 άλλα σημεία του επιπέδου  που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία, θα έδιναν το ίδιο επίπεδο:



#### Επίπεδο στον Rn

Άμεση είναι η γενίκευση στον ορισμό του επιπέδου στον :

**Ορισμός:** Ένα υποσύνολο  ονομάζεται επίπεδο αν υπάρχουν , με  μη συγγραμμικά, τέτοια που να ισχύει



δηλ. το  ταυτίζεται με τη μετατόπιση κατά  του : .