## 1. Στοιχεία και πράξεις στον Rn

### Διανύσματα στο επίπεδο και ο R2

* Ας θεωρήσουμε **το επίπεδο** και ένα **σύστημα συντεταγμένων** με άξονες 



* καθώς και τα διανύσματα  στο επίπεδο.
* **διανύσματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση**, έχουν δηλαδή ίδια φορά και μήκος, δε διακρίνονται αλλά **θεωρούνται ένα και το αυτό διάνυσμα.**
* **διαλέγουμε ένα διάνυσμα ως** «**κανονικό εκπρόσωπο**» όλων όσων ταυτίζονται με αυτό, και αυτό θα είναι το διάνυσμα που έχει **ως σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων**.
* Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα  **αρκεί λοιπόν να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο καταλήγει** το διάνυσμα, σημείο το οποίο ονομάζουμε .



* Το σύνολο των σημείων  του επιπέδου, ταυτίζεται με το σύνολο των διατεταγμένων δυάδων πραγματικών αριθμών, και συμβολίζεται με .

**Σε κάθε διάνυσμα (που ξεκινάει από το 0) λοιπόν αντιστοιχεί ένα σημείο του επιπέδου και σε κάθε σημείο του επιπέδου ένα διάνυσμα** (το διάνυσμα που πάει από την αρχή των αξόνων στο σημείο αυτό).

Επίσης κάθε **σημείο του επιπέδου** ορίζεται με μια **δυάδα πραγματικών αριθμών**, τις **δυο συντεταγμένες** του σημείου.

### Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και μεταξύ σημείων

Στα **διανύσματα** έχω δύο πράξεις:

* **πολλαπλασιασμό διανύσματος με πραγματικό αριθμό**, όπου το  ορίζεται ως το διάνυσμα με (*λ*)-πλάσιο μήκος και ίδια φορά με το  αν  και αντίθετη αν .







<https://www.geogebra.org/m/HYZXHadK>

* **πρόσθεση μεταξύ διανυσμάτων** όπου το  προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:









Vector Addition <https://www.geogebra.org/m/Cy8bxaKS>

Vector Addition <https://www.geogebra.org/m/dfUmKFZ7>

Vector Subtraction <https://www.geogebra.org/m/vUAFWvmk>

* Στα **σημεία του επιπεδου ή καλύτερα στα στοιχεία του**  μπορώ να ορίσω δύο αντίστοιχες πράξεις
* και επιπλεόν να ορίσω ότι τα σημεία του επιπέδου εξοπλισμένα με αυτές τις πράξεις αποτελούν τον :

**Ορισμός:** είναι το σύνολο των διαταγμένες δυάδων  πραγματικών αριθμών , [με σύμβολα ]

εφοδιασμένων με τις παρακάτω πράξεις:

- πρόσθεση: Αν  και  ορίζω το άθροισμα  ως .

- πολλαπλασιασμό με πραγματικό: Αν  και  τότε ορίζω το γινόμενο  ως , δηλ. πολλαπλασιάζω και προσθέτω κατά συντεταγμένη.

Οι πράξεις στον  έχουν οριστεί έτσι ώστε **η αντιστοιχία που είδαμε μεταξύ διανυσμάτων και στοιχείων** του  (σημείων του επιπέδου) να **διατηρείται και στα αποτελέσματα των εκάστοτε μεταξύ τους πράξεων**.

**Δηλαδή:**

* αν  το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα , τότε το  είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα :













* και επίσης: το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα  (που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου) είναι ακριβώς το .











Αφού λοιπόν **υπάρχει μια πλήρης αντιστοιχία** ανάμεσα στα διανύσματα και στα σημεία του επιπέδου (στοιχεία του ) καθώς και στο τι μπορώ να κάνω με αυτά (πράξεις), **μπορώ να τα ταυτίσω, δηλ.** να τα βλέπω σαν δύο όψεις του ίδιου πράγματος, **να μη διακρίνω πια μεταξύ διανυσμάτων και .**

* Οι δύο όψεις είναι η γεωμετρική (διανύσματα) και η αλγεβρική (στοιχεία του ), δηλ. αυτή στην οποία κάνω πράξεις με σύμβολα και αριθμούς.
  + Η **γεωμετρική θεώρηση** των πραγμάτων με **βοηθάει να φανταστώ καλύτερα ορισμένες ιδιότητες** ή καταστάσεις και έτσι να τις κατανοώ καλύτερα.
  + Η **αλγεβρική θεώρηση** όμως έχει το πλεονέκτημα ότι **μπορώ πιο εύκολα να γενικεύσω** και να επεκτείνω αυτά που κάνουμε με διανύσματα σε χώρους περισσότερων διαστάσεων, τον , στους οποίους δεν έχω γεωμετρική εποπτεία (δεν μπορώ να φανταστώ πάνω από 3 διαστάσεις).

### Ο

Η αλγεβρική θεώρηση μας επιτρέπει άμεσα να ορίσουμε τέτοιους χώρους κατ’ αναλογία του ορισμού του :

**Ορισμός:** Για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  ορίζουμε τον ** ως το σύνολο των (διατεταγμένων) *n*-αδων πραγματικών αριθμών



συντεταγμένες του 

(σύμβαση: γράφουμε αυτές τις *n*-αδες ως στήλες)

- πρόσθεση: Για  και  ορίζω το άθροισμα  ως εκείνο το στοιχείο του  που έχει ως συντεταγμένες το άθροισμα των συντεταγμένων των  και:



- πολλαπλασιασμός με πραγματικό: Αν  και 

τότε .

Προσθέτουμε και πολλαπλασιάζουμε κατά συντεταγμένες.

Ποιος είναι ο **?

3D Vector visualization

<https://www.geogebra.org/m/bDFcHaUt>

sum of 2 vectors in 3d

<https://www.geogebra.org/m/uMWZCwzs>

### Κανόνες πράξεων στον

Έστω  και .

Επίσης για  ορίζουμε .

Έχουμε:

* **** (αντιμεταθετική)
*  (προσεταιριστική)



*  (υπάρχει μηδέν της πρόσθεσης)



*  (υπάρχει αντίθετος)



* 



*  (επιμεριστική για + διανυσμ.)
*  (επιμεριστική για + βαθμωτών)



Οι αποδείξεις είναι εύκολες: περνάμε σε συντεταγμένες και εκεί χρησιμοποιούμε αντίστοιχες ιδιότητες πραγματικών αριθμών.

π.χ. τελευταία:





## 

