

**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**9 Δεκεμβρίου 2022**

**ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Μάθημα : "Γραμμική Άλγεβρα Ι"**

**Διδάσκων: Ε. Ιωαννίδης**

**Χρόνος: 2 ώρες**

**Σημείωση:**

α) Στις απαντήσεις **βάζετε** πάντα τον πλήρη τίτλο της υπο-ερώτησης στην αρχή της απάντησής της: π.χ. "1.1)", "1.2)", "1.3)", "1.4)".

β) Αν η απάντηση σε μια υπο-ερώτηση διακόπτεται και συνεχίζεται σε άλλη σελίδα, βάζετε την ένδειξη "Συνεχίζεται".

**Θέμα 1ο**

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας Α:

,

* 1. **(2 μον.)** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.
  2. **(0.5 μον.)** Να βρεθεί μία βάση του χώρου στηλών του Α.
  3. **(0.5 μον.)** Να βρεθεί μία βάση του χώρου γραμμών του Α.
  4. **(1 μον.)** Να βρεθεί μία βάση του μηδενόχωρου του Α.
  5. **(2 μον.)** Να βρεθεί μία βάση του αριστερού μηδενόχωρου του Α.
  6. **(1 μον.)** Έστω , η πρώτη γραμμή του Α και . Να βρεθεί μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του U.
  7. **(1 μον.)** Έστω . Περιγράψτε το σύνολο των λύσεων του συστήματος  ως  για κατάλληλα **ανεξάρτητα** . Τι γεωμετρικό σχήμα είναι το σύνολο των λύσεων του ; Είναι υπόχωρος;

**Θέμα 2ο**

Δίνονται τα ακόλουθα διανύσματα του :

 ,  και έστω 

και .

* 1. **(2 μον.)** Να βρεθεί πίνακας Α τέτοιος που για κάθε  το  να είναι εκείνο το στοιχείο του Ε που έχει τη μικρότερη απόσταση από το .
  2. **(1 μον.)** Να βρεθεί πίνακας Β τέτοιος που για κάθε  το  να είναι εκείνο το πολλαπλάσιο του b που έχει τη μικρότερη απόσταση από το .
  3. **(1 μον.)** Έστω .Να βρεθούν  και , τέτοια ώστε  .

**Θέμα 4ο**

**(2 μον.)** Έστω  ένας 6x4 πίνακας και  η απεικόνιση , . Απαντήστε σε καθένα από τα παρακάτω ποιο είναι το Σωστό/Λάθος **αιτιολογώντας σύντομα (**25% σωστή απάντηση, 75% σωστή αιτιολόγηση).

1. H  είναι σίγουρα/μπορεί να είναι / αποκλείεται να είναι **επί**
2. Αν βρώ  και  με , τότε το σύνολο των  με  δίνονται από .
3. H  είναι σίγουρα/μπορεί να είναι / αποκλείεται να είναι **μονοσήμαντη**
4. Αν για ένα  υπάρχει ακριβώς ένα  με , τότε για όλα τα άλλα  θα βρίσκω ακριβώς ένα  με .

**Θέμα 5ο**

**(2 μον.)** Έστω δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα  του , και ένα τρίτο διανύσματα  του , τέτοιο ώστε  γραμμικά εξαρτημένα. Απαντήστε σε καθένα από τα παρακάτω με Σωστό/Λάθος **αιτιολογώντας σύντομα (**25% σωστή απάντηση, 75% σωστή αιτιολόγηση).

Το σύνολο 

1. Είναι υπόχωρος του  με διάσταση 3
2. Είναι υπόχωρος του  με διάσταση 2
3. Είναι επίπεδο στον  που περνά από το .
4. Ισχύει ότι 
5. Το  είτε θα είναι πολλαπλάσιο του , είτε θα είναι πολλαπλάσιο του .

**Θέμα 6ο**

**(2 μον.)** Έστω  ένας **5x7** πίνακας που έχει **3** ανεξάρτητες στήλες και έστω  η απεικόνιση . Απαντήστε σε καθένα από τα παρακάτω με Σωστό/Λάθος **αιτιολογώντας σύντομα (**25% σωστή απάντηση, 75% σωστή αιτιολόγηση).

1. Έστω . Το σύνολο των  για τα οποία  είναι ο χώρος στηλών του .
2. Ο χώρος γραμμών του  είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του συνόλου των  για τα οποία .
3. Οποιαδήποτε βάση του μηδενόχωρου του  αποτελείται από ακριβώς 3 στοιχεία.
4. Ο αριστερός μηδενόχωρος του  είναι μια ευθεία που περνά από το .
5. Το σύνολο των  που είναι ορθογώνια στην εικόνα της  της  είναι ο μηδενόχωρος του .

**Θέμα 7ο**

**(2 μον.)** Έστω  ένας υπόχωρος του  με  και  o πίνακας προβολής στον . Απαντήστε σε καθένα από τα παρακάτω με Σωστό/Λάθος **αιτιολογώντας σύντομα (**25% σωστή απάντηση, 75% σωστή αιτιολόγηση).

1. Ο  είναι ένας  πίνακας.
2. Ο  είναι ένας  πίνακας.
3. Ο  έχει χώρο στηλών τον .
4. Ο  έχει αριστερό μηδενόχωρο το ορθογώνιο συμπλήρωμα  του .
5. Ο  είναι συμμετρικός.

Τύπος που ίσως χρειαστείτε: 