1.10 Ρυθμός Κινδύνου

Έστω X μια θετική συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F και πυκνότητα πιθανότητας f. Ας υποθέσουμε ότι η X περιγράφει την διάρκεια ζωής ενός οργανισμού ή την διάρκεια λειτουργίας ενός εξαρτήματος, π.χ. ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα. Η πιθανότητα ο λαμπτήρας να υποστεί βλάβη μέσα στο διάστημα $(t, t + \Delta t]$ δεδομένου ότι έχει ηλικία t είναι βεβαίως

$$\mathbb{P}(t < X \leq t + \Delta t | X > t) \; = \; \frac{\mathbb{P}(t < X \leq t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \; = \; \frac{\mathbb{P}(t < X \leq t)}{\mathbb{P}(X > t)} \; = \; \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

Ορίζουμε ως ρυθμό κινδύνου το *όριο της πιθανότητας να υποστεί βλάβη ένα εξάρτημα ηλικίας* t *μέσα στα επόμενα* Δt *δευτερόλεπτα, διαιρεμένη με* Δt, *όταν* $\Delta t \to 0$, δηλαδή

$$h(t) \; := \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{P}(t < X \leq t + \Delta t | X > t) \; = \; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} \; = \; \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \quad (1.36)$$

(Στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[F(t + \Delta t) - F(t) \right] = F'(t) = f(t)$.)

Επομένως, για ένα χρονικό διάστημα πολύ μικρής διάρκειας, Δt, η πιθανότητα βλάβης ενός εξαρτήματος ή θανάτου του οργανισμόυ ηλικίας t είναι $h(t)\Delta t$.

Παραδείγματα υπολογισμού του ρυθμού κινδύνου για διάφορες κατανομές στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 1. Για την εκθετική κατανομή με πυκνότητα $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, και συνάρτηση κατανομής $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, ο ρυθμός κινδύνου είναι

$$h(t) \; = \; \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} \; = \; \lambda. \quad (1.37)$$

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός κινδύνου είναι σταθερός δηλαδή ανεξάρτητος από την ηλικία του εξαρτήματος. Η εκθετική κατανομή για την διάρκεια ζωής περιγράφει έναν οργανισμό ο οποίος δεν υπόκειται ούτε σε 'παιδική θνησιμότητα' ούτε σε 'γήρανση'. Η πιθανότητα θανάτου μέσα σε ένα διάστημα διάρκειας Δt είναι ανεξάρτητο από την ηλικία του οργανισμού στην αρχή του διαστήματος.

Παράδειγμα 2. Για την κατανομή $\Gamma(2, \lambda)$ με πυκνότητα πιθανότητας $f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ και συνάρτηση κατανομής $F(t) = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$, έχουμε τον ρυθμό κινδύνου

$$h(t) \; = \; \frac{\lambda^2 t e^{-\lambda t}}{1 - (1 - (1 + \lambda t) 1 e^{-\lambda t})} \; = \; \lambda \frac{t}{1 + t}. \quad (1.38)$$

Εδώ ο ρυθμός κινδύνου αυξάνει με την ηλικία του εξαρτήματος και τείνει στην σταθερά λ.

Παράδειγμα 3. Για την λεγόμενη *υπερεκθετική κατανομή* με πυκνότητα πιθανότητας $f(t) = p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$, $t > 0$, με $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ και συνάρτηση κατανομής $F(t) = 1 - p_1 e^{-\lambda_1 t} - p_2 e^{-\lambda_2 t}$, έχουμε τον ρυθμό κινδύνου

$$h(t) \;=\; \frac{p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{1 - (1 - p_1 e^{-\lambda_1 t} - p_2 e^{-\lambda_2 t})} \;=\; \frac{p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}}{p_1 + p_2 e^{-(\lambda_2-\lambda_1)t}}. \tag{1.39}$$

Εδώ ο ρυθμός κινδύνου *μειώνεται με την ηλικία του εξαρτήματος*. Ξεκινάει από την τιμή $p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2$ και τείνει στην λ_1.

Παράδειγμα 4. Αν η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο διάστημα $[0, T]$ με πυκνότητα πιθανότητας $f(t) = \frac{1}{T}\mathbf{1}(0 \le t \le T)$ και συνάρτηση κατανομής $F(t) = t/T$ για $0 \le t \le T$, $F(t) = 1$ όταν $t \ge T$. Ο ρυθμός κινδύνου σ΄ αυτή την περίπτωση είναι

$$h(t) \;=\; \frac{1/T}{1 - t/T} \;=\; \frac{1}{T - t} \qquad \text{για } 0 \le t < T. \tag{1.40}$$

Παρατηρείστε ότι εδώ ο ρυθμός κινδύνου τείνει στο $+\infty$ οταν $t \to T$. Αυτό είναι αναμενόμενο. Καθώς η ηλικία του εξαρτήματος πλησιάζει στο άνω όριο της ζωής του T η βλάβη γίνεται βεβαία και ο ρυθμός κινδύνου γίνεται όλο και μεγαλύτερος, χωρίς άνω όριο.

Πρόταση 1.1. *Ο ρυθμός κινδύνου* $h(t)$, $t \ge 0$, *προσδιορίζει την συνάρτηση κατανομής* $F(t)$ *και ισχύει ότι*

$$F(t) \;=\; 1 - e^{\int_0^t h(u)du}, \quad t \ge 0. \tag{1.41}$$

Απόδειξη. Έστω $h(t)$ μια δεδομένη, μη αρνητική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, t]$. Από την σχέση (1.36) προσδιορίζουμε την κατανομή που αντιστοιχεί στον δεδομένο ρυθμό κινδύνου ως εξής.

$$h(t) \;=\; \frac{f(t)}{1 - F(t)} \;=\; -\frac{\frac{d}{dt}(1 - F(t))}{1 - F(t)} \;=\; -\frac{d}{dt}\log(1 - F(t)).$$

(Ο λογάριθμος είναι βεβαίως φυσικός.) Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή από 0 ως t έχουμε

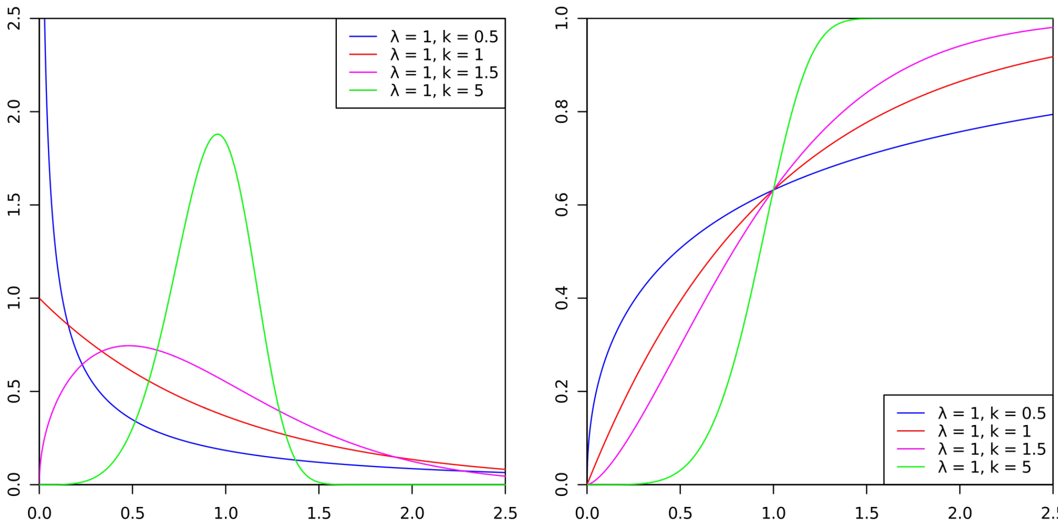
$$\int_0^t h(u)du \;=\; -\log(1 - F(t))$$

απ΄ όπου προκύπτει η (1.41. □

Για παράδειγμα, θεωρούμε την οικογένεια των κατανομών που προσδιορίζεται από τον ρυθμό κινδύνου

$$h(t) \;=\; k\lambda^k t^{k-1}, \quad t > 0 \tag{1.42}$$

Το $\lambda > 0$ είναι παράμετρος κλίμακος (που σχετίζεται με την μονάδα μέτρησης του χρόνου διάρκειας του φαινομένου που μελετάμε) ενώ η παράμετρος $k \in (0, \infty)$ είναι η



Σχήμα 1.11: Η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής Weibull για διάφορες τιμές των παραμέτρων της. (Πηγή: Wikipedia.

παράμετρος σχήματος που προσδιορίζει τον τύπο της κατανομής: Αν $k \in (0,1)$ τότε ο ρυθμός κινδύνου τείνει στο $+\infty$ όταν $t \to 0$ και φθίνει στο 0 όταν το t είναι μεγάλο. Αντίστοιχα, αν $k \in (1,\infty)$ τότε ο ρυθμός κινδύνου ξεκινάει από το 0 και τείνει στο $+\infty$ όταν το $t \to \infty$. Η οριακή περίπτωση $k = 1$ ανάμεσα σ′ αυτές τις δύο αντιστοιχεί στην εκθετική κατανομή.

Δεδομένου ότι $\int_0^t h(u)du = \lambda^k \int_0^t ku^{k-1}du = (\lambda t)^k$ και από την (1.42)

$$F(t) \;=\; 1 - e^{-(\lambda t)^k}, \qquad \text{και} \quad f(t) \;=\; k\lambda^k t^{k-1} e^{-(\lambda t)^k}, \quad \text{για} \;\; t > 0. \tag{1.43}$$

Η οικογένεια κατανομών αυτή ονομάζεται Weibull και παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς όπως η θεωρία αξιοπιστίας, τα ασφαλιστικά μαθηματικά, η ανάλυση επιβίωσης κλπ. Το σχήμα (1.11) δείχνει την μορφή της πυκνότητας πιθανότητας και της συνάρτησης κατανομής για διάφορες τιμές του k.