

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την μέση τιμή  $EX$ , και την διασπορά  $\text{Var}(X)$ . Να βρείτε επίσης την συνάρτηση κατανομής  $F(x)$  της  $X$ .

Έστω τώρα  $Y = X(X - 1)$ . Να βρείτε την συνάρτηση κατανομής της  $Y$ ,  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$  και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$ . Να υπολογίσετε επίσης την μέση τιμή  $EY$ .

**Πρόβλημα 2.** Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{αν } 1 \leq x. \end{cases}$$

Να βρείτε την συνάρτηση κατανομής  $F(x)$  της  $X$ .

Έστω τώρα  $Y = X^2$  και  $Z = 1/X$ . Να βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $Y$  και της  $Z$ .

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων. Η  $X$  παίρνει τιμές στο σύνολο  $\{0, 1\}$  ενώ η  $Y$  παίρνει τιμές στο σύνολο  $\{-1, 1\}$ . Η από κοινού κατανομή τους δίδεται από τον ακόλουθο πίνακα:

$Y/X$	0	1
-1	1/6	2/6
1	2/6	1/6

- α) Να υπολογίσετε τις περιθώριες κατανομές των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .
- β) Είναι οι  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες;
- γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την διασπορά των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .
- δ) Να υπολογίσετε την δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E}[Y|X = 1]$ .

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $X$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, ομοιόμορφα κατανομημένη στο σύνολο  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . (Η  $X$  θα μπορούσε να θεωρηθεί το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τιμίου ζαριού.) Έστω επίσης  $Y$  μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή, ορισμένη στον ίδιο χώρο πιθανότητας με την  $X$ , και ανεξάρτητη από αυτήν, κατανομημένη σύμφωνα με την γεωμετρική κατανομή  $P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Υποθέτουμε ότι  $p = 2/7$ .

- α) Να υπολογίσετε τις μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .
- β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες  $P(X > 3)$  και  $P(Y > 3)$ .
- γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X = Y)$ .
- δ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X > Y)$ .

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο σύνολο  $[0, 1]$  ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας που ορίζεται ως

$$f(x, y) = \begin{cases} C \frac{x+y}{1+y} & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- α) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς  $C$ .
- β) Να υπολογίσετε τις περιθώριες πυκνότητες των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .
- γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X > 1/2, Y < 1/2)$ .
- δ) Να υπολογίσετε την δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας  $f_{X|Y}(x|y)$ .
- ε) Να υπολογίσετε την πιθανότητα  $P(X > 1/2 | Y = 1/3)$ .

**Πρόβλημα 6.** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο σύνολο  $[0, \infty)$  ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας που ορίζεται ως

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + xy) e^{-(x+y)} & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- α) Να υπολογίσετε τις περιθώριες πυκνότητες των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ .
- β) Να υπολογίσετε την από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ .
- γ) Να υπολογίσετε την δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας  $f_{X|Y}(x|y)$ .
- δ) Να υπολογίσετε την δεσμευμένη μέση τιμή  $E[X|Y = y]$  και την πιθανότητα  $P(X > x | Y = y)$ .

**Πρόβλημα 7.** Έστω  $X$  και  $Y$  από κοινού κατανεμημένες με την κατανομή διμεταβλητή Cauchy με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x, y) = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{(c^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

όπου  $c > 0$  δεδομένη σταθερά. Να υπολογίσετε την περιθώρια πυκνότητα πιθανότητας της  $X$  και την δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της  $Y$  δεδομένου ότι  $X = x$ .

**Πρόβλημα 8.** Έστω  $X$  και  $Y$  από κοινού κατανεμημένες με την διμεταβλητή κατανομή Γάμμα με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1} e^{-y} \quad \text{για } 0 < x < y$$

όπου  $\alpha, \beta$  θετικές παράμετροι. Να υπολογίσετε την περιθώρια πυκνότητα πιθανότητας της  $X$  και της  $Y$  και την δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της  $X$  δεδομένου ότι  $Y = y$ .

**Πρόβλημα 9.** Έστω  $X$  μια διωνυμική κατανομή  $\text{Binom}(n, p)$  ( $n$  ανεξάρτητες δοκιμές, η κάθε μία με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ ). Να δείξετε ότι

$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}.$$

**Πρόβλημα 10.** Ένα πείραμα έχει 3 δυνατά αποτελέσματα, A, B, και Γ τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες  $\alpha, \beta$ , και  $\gamma := 1 - \alpha - \beta$ . Εκτελούμε το πείραμα κατ'επανάληψη μέχρι την πρώτη φορά που θα πραγματοποιηθεί το αποτέλεσμα Γ. Οι διαδοχικές αυτές επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες. Έστω  $X$  και  $Y$  ο αριθμός των πραγματοποιήσεων του A και του B αντίστοιχα μέχρι να συμβεί το πρώτο Γ, οπότε και σταματάμε. Να δείξετε ότι

$$P(X = m, Y = n) = (1 - \alpha - \beta) \binom{m+n}{n} \alpha^m \beta^n, \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Να βρείτε την περιθώρια κατανομή των  $X$  και  $Y$ . Να βρείτε επίσης την δεσμευμένη κατανομή του  $Y$  δεδομένου ότι  $X = m$ , δηλαδή την  $P(Y = n | X = m)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$