πχ. Παίζουμε μ' έναν φίλο μας το εξής παιχνίδι:

Ρίχνουμε ένα ζάρι 1 φορά.

- Αν η ένδειξη είναι 1 ή 2 δίνουμε στον φίλο μας 4 €
- Αν η " " 3, 4, 5, 6 παίρνουμε από τον " " 3 €

Y = κέρδος $\quad Y \in \{-4, 3\}$ διτιμη τ.μ.

$$P(Y=-4) = \frac{2}{6} \qquad P(Y=3) = \frac{4}{6}$$

$$E(Y) = (-4)\frac{2}{6} + 3\frac{4}{6} = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

(Ζημία $\frac{2}{3}$ του φίλου μας. Δεν είναι δίκαιο το παιχνίδι).

Τροποποιούμε το παιχνίδι.

- Αν η ένδειξη είναι 1 ή 2 δίνουμε στον φίλο μας 4 €
- Αν " " " 3, 4, 5, 6 παίρνουμε από τον " " 2 €

Y = κέρδος $\quad Y \in \{-4, 3\}$

$$P(Y=-4) = \frac{2}{6} \qquad P(Y=2) = \frac{4}{6}$$

$$E(Y) = (-4)\frac{2}{6} + 2\frac{4}{6} = 0 \text{ €}$$

(Δίκαιο Παιχνίδι)

Διακύμανση

Ορισμός: Έστω X διακριτή τ.μ. Έστω ότι υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η Διακύμανση της X ορίζεται ως εξής:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2]$$

εφόσον υπάρχει η μέση τιμή στο δεξί μέλος.

Παρατήρηση: Η διακύμανση (αν υπάρχει) είναι μη αρνητικός αριθμός.

Ορισμός: Έστω X διακριτή τ.μ. Η τυπική απόκλιση της X ορίζεται ως εξής:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

Σημείωση: Η διακύμανση της X συμβολίζεται συχνά με σ_X^2

Σημείωση: Η διακύμανση της X είναι μέτρο διασποράς της X γύρω από την μέση τιμή μ.

Πρόταση: Αν $P(X=c)=1$ τότε $V(X)=0$

Απόδειξη: $\mu = E(X) = c$

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = (c-\mu)^2 \cdot P(X=c)$$
$$= (c-c)^2 * 1 = 0$$

Πρόταση: Έστω X διακριτή τ.μ. με $E(X)=\mu$
Αν $V(X)=0$, τότε $X=\mu$.

Πρόταση: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Σημείωση: Αφού $V(X) \geq 0$ από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$

πχ. $X = \#$ ελαττωμάτων σε προϊόν κάποιας γραμμής παραγωγής.

$f(x) = P(X=x)$, $x \in R_X = \{0,1,2,3,4,5\}$

x	$f(x)$
0	0.18
1	0.19
2	0.25
3	0.16
4	0.15
5	0.07

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = 0*0.18 + 1*0.19 + 2*0.25 + 3*0.16 + 4*0.15 + 5*0.07 = 2.12$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 f(x) = 0^2*0.18 + 1^2*0.19 + 2^2*0.25 + 3^2*0.16 + 4^2*0.15 + 5^2*0.07 = 23.86$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 23.86 - (2.12)^2 = 19.3656$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{19.3656} \simeq 4.4$$

<u>Πχ</u> $X \in \{a_1, \dots, a_\nu\}$

$$P(X=x) = \frac{1}{\nu} \quad x \in R_X = \{a_1, \dots, a_\nu\}$$ "ομοιόμορφη διακριτή"

$$E(X) = \frac{a_1 + \dots + a_\nu}{\nu}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \frac{1}{\nu} = \frac{a_1^2 + \dots + a_\nu^2}{\nu}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a_1^2 + \dots + a_\nu^2}{\nu} - \left(\frac{a_1 + \dots + a_\nu}{\nu}\right)^2$$

<u>Π.χ.</u> (Ειδική Περίπτωση)

Ρίψη ζαριού μιά φορά.

$X =$ ένδειξη του ζαριού

$$R_X = \{1, \dots, 6\}$$

$$E(X^2) = \frac{1^2 + \dots + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

<u>Πρόταση:</u> X τ.μ. $a, \beta \in \mathbb{R}$

$$V(aX+\beta) = a^2 V(X)$$

$$\sigma_{aX+\beta} = |a| \sigma_X$$

<u>Απόδειξη:</u> $Y = aX + \beta \qquad \mu_Y = a\mu_X + \beta$

$$V(aX+\beta) = V(Y) = E\left[(Y-\mu_Y)^2\right] = E\left[(aX+\cancel{\beta}-a\mu_X-\cancel{\beta})^2\right]$$

$$= a^2 E\left[(X-\mu_X)^2\right] = a^2 \cdot V(X)$$

Παίρνουμε τετραγωνική ρίζα:

$$\sigma_{aX+\beta} = \sqrt{V(aX+\beta)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \cdot \sigma_X$$

<u>πχ</u> X τ.μ. $E(X) = 3 \qquad E[X \cdot (X-5)] = -2$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τ.μ. $Y = -3X + 7$ και $Z = \dfrac{X-3}{2}$

<u>Απάντηση:</u> $E(X) = 3$

$$E[X(X-5)] = -2 \Rightarrow E(X^2 - 5X) = -2 \Rightarrow E(X^2) - 5E(X) = -2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = 5E(X) - 2 = 5*3-2 = 13$$

Συνεπώς $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 13 - 9 = 4$

Οπότε:

$$E(Y) = E(-3X+7) = -3E(X) + 7 = -3*3+7 = -2$$

$$V(Y) = V(-3X+7) = 9V(X) = 9*4 = 36.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{36} = 6$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-3}{2}\right) = E\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-3}{2}\right) = V\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}V(X) = \frac{1}{4}4 = 1$$

$$\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{1} = 1$$

Ορισμοί :

$\mu'_r = E(X^r)$ ροπή r-τάξεως (γύρω από το 0)

$\mu_{(r)} = E[(X)_r]$, παραγοντική ροπή r τάξεως
$r = 0, 1, \dots$

όπου $(X)_r = X(X-1)\cdots(X-r+1)$

$E[(X-c)^r]$: ροπή r τάξεως γύρω από το c

$\mu_r = E[(X-\mu)^r]$: κεντρική ροπή r τάξεως

$\mu'_0 = \mu_{(0)} = \mu_0 = 1$

$\mu'_1 = \mu_{(1)} = E(X)$

$\mu_2 = V(X)$

Οι Κυριότερες Διακριτές Κατανομές

Κατανομή Bernoulli:

Δοκιμή Bernoulli: Πείραμα με δύο αποτελέσματα: επιτυχία (ε), αποτυχία (α)

π.χ. Ρίψη ενός νομίσματος. Έχουμε δύο αποτελέσματα.
Θεωρούμε την εμφάνιση "κορώνας" ως επιτυχία
και " " "γραμμάτων" " αποτυχία.

$$\Omega = \{\varepsilon, a\}$$

Ορισμός: Έστω X = αριθμός επιτυχιών σε μία δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1-p$).

Η κατανομή της X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.

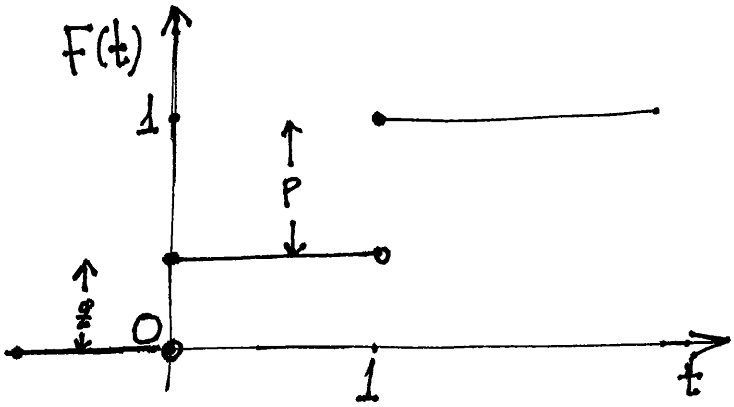
Λέμε ότι η τ.μ. $X \in \{0,1\}$ ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p.

Συμβολισμός: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$P(X=x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής της X:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ q, & 0\leq t<1 \\ 1, & t\geq 1 \end{cases}$$



$$\mu = 0 * P(X=0) + 1 * P(X=1) = 1 * p = p$$

$$\mu_2' = E(X^2) = 0^2 * P(X=0) + 1^2 * P(X=1) = p$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

π.χ. Ρίψη ζαριού.

Έστω $X = \begin{cases} 1, & \text{αν εμφανιστεί ένδειξη} > 4 \\ 0 & \text{" "} \leq 4 \end{cases}$

$p = P($εμφανίζεται 5 ή 6$) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(X=x) = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{" " } \frac{2}{3} \end{cases}$

$E(X) = \frac{1}{3} \qquad V(X) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Διωνυμική κατανομή

Έστω ν ανεξάρτητες επαναλήψεις μιας δοκιμής Bernoulli

Έστω $X = \#$ επιτυχιών σε μια ακολουθία ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1-p$ σε όλες τις δοκιμές

Σύνολο δυνατών τιμών της X: $R_X = \{0, 1, \ldots, \nu\}$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p και συμβολίζεται με $b(\nu, p)$.

Συμβολισμός: $X \sim b(\nu, p)$

\# Συνάρτηση πιθανότητας της X έχει τύπο:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, \nu$$

Σημείωση: $b(1, p) \equiv \text{Bernoulli}(p)$

<u>Π.χ.</u> Η πιθανότητα να κλαπεί ένα αυτοκίνητο σε μια συνοικία είναι 0.6. Αν σ' έναν δρόμο είναι σταθμευμένα 10 αυτοκίνητα, ποιά είναι η πιθανότητα

α. Να μην κλαπεί κανένα ;

β. Να κλαπούν το πολύ τρία ;

γ. Να κλαπούν τουλάχιστον 7 ;

<u>Απάντηση:</u> Έστω $X = \#$ αυτοκινήτων που κλέβονται ανάμεσα στα 10 αυτοκίνητα

$$X \sim b(10,\ 0.6)$$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0.6^x \cdot 0.4^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

α. $$P(X=0) = \binom{10}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^{10-0} = 0.4^{10} = 0.0001$$

β. $$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$\simeq 0.0001 + 0.002 + 0.0011 + 0.042 = 0.055$$

γ. $$P(X \geq 7) = P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$\simeq 0.215 + 0.121 + 0.040 + 0.006 = 0.382$$