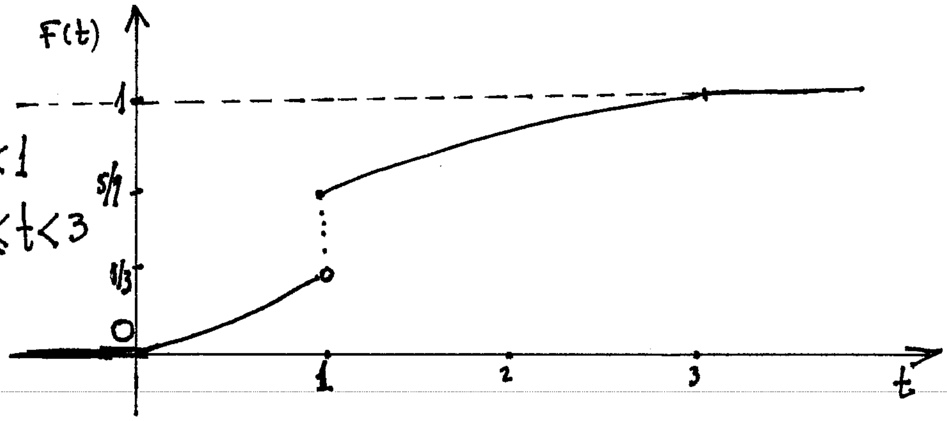
Πχ. X = ημερήσιες συναλλαγές (σε εκατομμύρια Ευρώ) σε μία Τράπεζα

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{3}t^2, & 0 \leq t < 1 \\ c(6t - t^2), & 1 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$



$P(X<3) = 1$

α) $c =$; β) Να βρεθούν $P(X<1)$, $P(X>1)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$

γ) Τα ενδεχόμενα $A = (0.5 \leq X \leq 2.5)$ και $B = (X>2)$ είναι ανεξάρτητα;

Απάντηση:

α) $P(X<3) = 1 \Rightarrow F(3-) = 1 \Rightarrow c(6*3 - 3^2) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$

β) $P(X<1) = F(1-) = \frac{1}{3}1^2 = \frac{1}{3}$

$P(X>1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{9}(6*1 - 1^2) = \frac{4}{9}$

$P(X=1) = F(1) - F(1-) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$P(X=2) = F(2) - F(2-) = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 0$

γ) $P(A) = P(0.5 \leq X \leq 2.5) = F(2.5) - F(0.5-) = F(2.5) - F(0.5) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{1}{9}$

$P(AB) = P(2 < X \leq 2.5) = F(2.5) - F(2) = \frac{1}{12}$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(AB) \neq P(A)P(B)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (διακριτές τ.μ.)

<u>Ορισμός</u>: Μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>διακριτή</u> (ή απαριθμητή) αν το σύνολο των δυνατών τιμών της R_X είναι <u>πεπερασμένο</u> ή <u>απείρως αριθμήσιμο</u>.

<u>π.χ.</u> Ρίψη νομίσματος ν φορές. Έστω

$X = \#$ κορώνων

$R_X = \{0, 1, \ldots, \nu\}$ "πεπερασμένο σύνολο"

<u>π.χ</u> X = χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα.

$R_X = [0, +\infty)$. "αυτό το σύνολο είναι άπειρο υπεραριθμήσιμο"

Συνεπώς η τ.μ. X <u>Δεν</u> είναι διακριτή τ.μ.

Έστω $Y = [X]$ (θυμίζουμε ότι αν $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που ΔΕΝ υπερβαίνει το x.) "ακέραιο μέρος του x"

Βλέπουμε ότι $R_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$ "αυτό το σύνολο είναι απείρως αριθμήσιμο"

Συνεπώς η τ.μ. Y είναι <u>διακριτή τ.μ.</u>

<u>π.χ.</u> Θεωρούμε μια γραμμή παραγωγής. Έστω

$X = \#$ προϊόντων που εξετάζονται μέχρι την εύρεση του $1^{ου}$ ελαττωματικού προϊόντος

$R_X = \{1, 2, \ldots\}$. Άρα η τ.μ X είναι διακριτή.

"απείρως αριθμήσιμο σύνολο"

$Y = \#$ μη ελαττωματικών μέχρι να βρεθεί το $1^{ο}$ ελαττωματικό

$R_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Άρα η τ.μ. Y είναι διακριτή.

"απείρως αριθμήσιμο σύνολο"

Συνάρτηση Πιθανότητας της διακριτής τ.μ. X

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Προφανώς αν $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ τότε:

(1) $f(x) = 0$, γιά κάθε $x \notin R_X$

(2) $0 \leqslant f(x_i) \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \dots$

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (1), (2), (3) τότε η f είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ.

π.χ. Ρίψη δύο ζαριών. Έστω X = Η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις

Y = Η μικρότερη από τις δύο ενδείξεις

Z = διαφορά (μεγαλύτερη ένδειξη − μικρότερη ένδειξη)

$X \in \{1, \dots, 6\}$

$f_X(1) = P(X=1) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

$f_X(2) = P(X=2) = P(\{(1,2),(2,1),(2,2)\}) = \frac{3}{36}$

$f_X(3) = P(X=3) = P(\{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}) = \frac{5}{36}$

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$f_X(x) = \frac{2x-1}{36}$

$x = 1, \dots, 6$

$Y \in \{1, \dots, 6\}$

y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(y)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$f_Y(y) = \frac{13-2y}{36} \quad y = 1, \dots, 6$

$Z \in \{0, 1, \dots, 5\}$

z	0	1	2	3	4	5
$f_Z(z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

__πχ.__ Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x) = c\,\frac{3^{x-1}}{4^x}$, $x = 1, 2, \dots$ να είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας κάποιας διακριτής τ.μ.

__Απάντηση:__ Πρέπει $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$

$$ή \quad \sum_{x=1}^{\infty} c\,\frac{3^{x-1}}{4^x} = 1$$

$$ή \quad \frac{c}{4} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = 1$$

$$ή \quad \frac{c}{4}\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1$$

$$ή \quad \frac{c}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 \implies c = 1$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ Τ.Μ.

Ορισμός: Έστω X μια διακριτή τ.μ. με σύνολο δυνατών τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f.

Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x)$$

$$= \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

εφόσον $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) < \infty$

Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X = x_i) = \infty$ τότε λέμε ότι δεν υπάρχει η μέση της X

Παρατήρηση: Εκτός του όρου μέση τιμή της X, χρησιμοποιούνται και οι όροι: μέσος της X, μαθηματική ελπίδα της X

Εκτός του συμβόλου $E(X)$ χρησιμοποιείται και το σύμβολο μ ή μ_X

Π.χ. Ένας υπάλληλος ασφαλιστικής εταιρίας μπορεί να διεκπεραιώσει την ημέρα 2 έως 5 δηλώσεις

# δηλώσεων X	$\mathbb{P}(X=x)$, $x=2,3,4,5$
2	0.15
3	0.30
4	0.35
5	0.20

Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δηλώσεων;

Απάντηση: $$E(X)=\sum_{x=2}^{5} x\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

$$=2*0.15+3*0.3+4*0.35+5*0.2$$

$$=3.6$$

Π.χ. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός γραμμάτων κατά την ρίψη ενός νομίσματος 4 φορές;

Απάντηση: X = # γραμμάτων κατά την ρίψη ενός νομίσματος 4 φορές

$$\mathbb{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{16}, & x=0\\ \frac{4}{16}, & x=1\\ \frac{6}{16}, & x=2\\ \frac{4}{16}, & x=3\\ \frac{1}{16}, & x=4\end{cases}$$

$$E(X)=\sum_{x=0}^{4} x\cdot\mathbb{P}(X=x)=0*\frac{1}{16}+1*\frac{4}{16}+2*\frac{6}{16}+3\frac{4}{16}+4\frac{1}{16}=2$$

<u>πχ.</u> Έστω τ.μ. $X \in \{a_1, \dots, a_\nu\}$ με

$$P(X = a_i) = \frac{1}{\nu}, \quad i = 1, \dots, \nu$$ (Η τ.μ. X λέγεται ομοιόμορφη στο σύνολο $\{a_1, \dots, a_\nu\}$)

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i P(X = a_i) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{a_1 + \dots + a_\nu}{\nu}$$

<u>πχ.</u> X = ένδειξη κατά την ρίψη ενός ζαριού

$$X \in \{1, \dots, 6\}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1 + \dots + 6}{6} = \frac{7}{2}.$$

<u>πχ</u> Έστω X τ.μ. με σύνολο δυνατών τιμών

$$R_X = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(X > x) = \frac{c}{x+1}, \quad x = 0, 1, \dots \quad c \in \mathbb{R} \quad (*)$$

α) $c = ;$ $\quad f(x) = P(X = x) = ;$ $\quad x = 1, 2, \dots$

β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $E(X)$.

Απάντηση:

α) $f(x) = P(X=x) = P(X>x-1) - P(X>x)$

$$= \frac{c}{x} - \frac{c}{x+1} = \frac{c}{x(x+1)} \quad ; \quad x = 1, 2, \ldots$$

Απο την σχέση (*), θέτοντας $x=0$, προκύπτει ότι

$$\left.\begin{array}{l} P(X>0) = c \Rightarrow P(X \leqslant 0) = 1 - c \\ \text{Αφού } X \in \{1,2,\ldots\} \Rightarrow P(X \leqslant 0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-c=0 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Επομένως: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x = 1, 2, \ldots$

β) $$\sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει η μέση τιμή της τ.μ. X

Πρόταση: Έστω X τ.μ. τέτοια ώστε $P(X=c) = 1$.
Τότε $E(X) = c$.

Απόδειξη: $$E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X=x) = c \cdot P(X=c)$$

$$= c * 1 = c$$

<u>Σημείωση</u>: Αν X τ.μ. διακριτή και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε και η τ.μ. $Y = g(X)$ είναι διακριτή.

<u>π.χ.</u> $g(x) = x^2 \quad Y = X^2$

$g(x) = \eta\mu x \quad Y = \eta\mu X$

<u>Πρόταση</u>: Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας f. Τότε η μέση τιμή της τ.μ. $Y = g(X)$ δίνεται από τον τύπο:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$$

<u>π.χ.</u> $$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \cdot f(x)$$

<u>Πρόταση</u>: X τ.μ. διακριτή, $g_1, g_2, \ldots, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$E[\lambda_1 g_1(X) + \cdots + \lambda_k g_k(X)] = \lambda_1 E[g_1(X)] + \cdots + \lambda_k E[g_k(X)]$$

<u>Πρόταση</u>: Αν X διακριτή τ.μ. και $a, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$E(a \cdot X + \beta) = aE(X) + \beta.$$

Π.χ. X τ.μ. $E(X)=2$, $E(X^2)=8$

Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών

$$Y_1=(4X+2)^2 \qquad Y_2=(X)_2=X(X-1) \qquad Y_3=X^2+(X+1)^2$$

Απάντηση:

$$E(Y_1)=E(16X^2+16X+4)=16E(X^2)+16E(X)+4=16*8+16*2+4=164$$

$$E(Y_2)=E[X(X-1)]=E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=8-2=6$$

$$E(Y_3)=E(X^2+X^2+2X+1)=E(2X^2+2X+1)=2E(X^2)+2E(X)+1$$

$$=2*8+2*2+1=21$$

πχ Έστω $X=\#$ υπολογιστών που πουλάει ένα μικρό κατάστημα σε 3 μήνες.

$$f(x)=\frac{2x+3}{63} \quad x\in R_X=\{0,1,\dots,6\}$$

Η μέση τιμή της X είναι

$$E(X)=\sum_{x=0}^{6}x f(x)=\frac{1}{63}\left(2\sum_{x=0}^{6}x^2+3\sum_{x=0}^{6}x\right)=\frac{35}{9}$$

Το κατάστημα αγοράζει από τον προμηθευτή 6 Η/Υ προς 1700 € με την εξής συμφωνία: Αν στους 3 μήνες δεν πουληθούν κάποια κομμάτια, μπορούν να επιστραφούν στον προμηθευτή στην τιμή όμως των 1000 €. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης ενός Η/Υ είναι 2200 €, ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος του εμπόρου σε 3 μήνες;

Απάντηση: Κέρδος $=Y=(2200-1700)X-700(6-X)$

$$=1200\cdot X-4200$$

$$E(Y)=E(1200X-4200)=1200E(X)-4200$$

$$=1200\frac{35}{9}-4200=\frac{4200}{9}\simeq 466{,}7 \text{ €}$$