Δεσμευμένη Πιθανότητα ενός ενδεχομένου

Ορισμός: Έστω Ω δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ με $P(B)>0$.
Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B ορίζεται ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

πχ Σε μια χώρα η πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85 ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.8. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70-χρονο άνδρα, ποιά είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον επιπλέον 5 χρόνια;

Απάντηση: A : ένας άνδρας ζει περισσότερο από 75 χρόνια
B : " " " " " 70 "

$P(A) = 0.8$, $P(A) = 0.85$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.8}{0.85} \simeq 0.94$$

πχ. Δοχείο περιέχει 4 μπλέ και 6 άσπρες σφαίρες. Εξάγουμε χωρίς επανάθεση 2 σφαίρες. Έστω

A_i : στην i-οστή εξαγωγή διαλέγουμε άσπρη σφαίρα $i=1,2$
B_i : " " " " μπλέ "

Απάντηση: $P(A_2|A_1) = \frac{5}{9}$ $P(A_2|B_1) = \frac{6}{9}$

$P(B_2|A_1) = \frac{4}{9}$ $P(B_2|B_1) = \frac{3}{9}$

<u>π.χ.</u> Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

A : Το αποτέλεσμα της $3^{ης}$ ρίψης είναι "Γράμματα".

$$P(A) = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\#\{ΚΚΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ, ΚΓΓ\}}{\#\{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΓΓΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B : Στις τρεις ρίψεις οι δύο ακριβώς έδωσαν "Γράμματα"

$B = \{ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΚ\}$, $AB = \{ΓΚΓ, ΚΓΓ\}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

<u>Πρόταση</u>: Ω δειγματικός χώρος, $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.

<u>PC1</u> $P(A|B) \geq 0$, για κάθε ενδεχόμενο του Ω.

<u>PC2</u> $P(\Omega|B) = 1$.

<u>PC3</u> Αν $A_1, A_2, \ldots$ ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω.

Τότε:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

<u>Απόδειξη</u>: $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$$

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\middle|\, B\right) = \frac{P[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) B]}{P(B)} = \frac{P[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i B)]}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

Σημείωση: Οι ιδιότητες των πιθανοτήτων ισχύουν ΚΑΙ για τις δεσμευμένες πιθανότητες. Έστω $P(B)>0$:

α. $P(\varnothing|B)=0$

β. $P(A'|B)=1-P(A|B)$

γ. $P(A\Gamma'|B)=P(A-\Gamma|B)=P(A|B)-P(A\Gamma|B)$

δ. $\Gamma\subseteq A \Rightarrow P(\Gamma|B)\leq P(A|B)$

ε. $P(A\cup\Gamma|B)=P(A|B)+P(\Gamma|B)-P(A\Gamma|B)$.

Σημείωση: Ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|B)$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

I) Περιορίζοντας τον δειγματικό χώρο στο σύνολο B

II) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Πολλαπλασιαστικός Τύπος:

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A_1A_2\cdots A_{\nu-1})>0$. Τότε:

$$P(A_1A_2\cdots A_\nu)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_\nu|A_1A_2\cdots A_{\nu-1})$$

Απόδειξη: Αφού $P(A_1\cdots A_{\nu-1})>0$ τότε: Οπότε:

$$P(A_1)\geq P(A_1A_2)\geq\cdots\geq P(A_1A_2\cdots A_{\nu-1})>0.$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P_3|A_1A_2)\cdots P(A_\nu|A_1A_2\cdots A_{\nu-1})$$

$$=\cancel{P(A_1)}\frac{\cancel{P(A_1A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\frac{\cancel{P(A_1A_2A_3)}}{\cancel{P(A_1A_2)}}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_{\nu-1}A_\nu)}{\cancel{P(A_1A_2\cdots A_{\nu-1})}}$$

$$=P(A_1A_2\cdots A_\nu)$$

πχ. Δοχείο περιέχει 5 άσπρες και 15 μαύρες σφαίρες. Διαλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο 4 σφαίρες. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε την σειρά ΑΜΑΜ αν

α) Η δειγματοληψία γίνεται με επανάθεση

β) " " " χωρίς "

Απάντηση: Εστω τα εξής ενδεχόμενα

A_i : Η i-οστή σφαίρα είναι άσπρη $\quad i=1,2,3,4$

M_i : " " " " μαύρη

$$P(A_1M_2A_3M_4) = P(A_1)P(M_2|A_1)P(A_3|A_1M_2)P(M_4|A_1M_2A_3)$$

β) χωρίς επανάθεση:

$$P(A_1M_2A_3M_4) = \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{14}{17} \simeq 0.036$$

α) με επανάθεση:

$$P(A_1M_2A_3M_4) = \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{20}\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{20} \simeq 0.035$$

πχ. Μετά από μία ληστεία σε τράπεζα η αστυνομία έχει συλλάβει 10 ύποπτους από τους οποίους 4 είχαν πράγματι συμμετάσχει στη ληστεία. Ο ανακριτής διαλέγει στην τύχη ένα άτομο, μετά ένα δεύτερο και τέλος ένα τρίτο. Ποιά είναι η πιθανότητα τα τρία άτομα που επιλέχτηκαν να είναι και τα τρία αθώα ή και τα τρία ένοχα ;

Απάντηση: A_i : Το i άτομο είναι αθώο $\quad i=1,2,3$

E_i : " " " ένοχο

$$P(\underbrace{A_1A_2A_3 \cup E_1E_2E_3}_{\text{ξένα}}) = P(A_1A_2A_3) + P(E_1E_2E_3)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) + P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)$$

$$= \frac{6}{10}\frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{10}\frac{3}{9}\frac{2}{8} = \frac{144}{720} = 0.2$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω ότι: $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_\nu$ με $P(B_i) > 0$, $i = 1, \ldots, \nu$

και $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Τότε

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_\nu)P(B_\nu)$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} P(A|B_i)P(B_i)$$

Απόδειξη: $A = A\Omega = A(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_\nu) = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_\nu$

$(AB_i)(AB_j) = A(B_i B_j) = A\emptyset = \emptyset$, $i \neq j$.

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} AB_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A|B_i)P(B_i)$$

Σημείωση: Έστω $\nu = 2$. $\Omega = B \cup B'$, $0 < P(B) < 1$. Τότε

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B').$$

π.χ. Μία ασφαλιστική εταιρία χωρίζει τους πελάτες σε δύο κατηγορίες

πελάτης:
- Κατηγορία Ι (υψηλού κινδύνου) 25%
- Κατηγορία ΙΙ (χαμηλού ") 75%

Έστω: A : πελάτης προκαλεί ατύχημα
B : πελάτης ανήκει στην κατηγορία Ι

$P(A|B) = 0.6$ $\quad$ $P(A|B') = 0.3$

$P(A) = ;$

Απάντηση:

$$P(A) \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')$$

$$= 0.6 * 0.25 + 0.3 * 0.75$$

$$= 0.375$$

π.χ. Εργοστάσιο έχει τρεις γραμμές παραγωγής.

A : Το προϊόν είναι ελαττωματικό

B_i : Το προϊόν κατασκευάστηκε στην γραμμή παραγωγής i, $i=1,2,3$.

$P(B_1)=0.5 \quad P(B_2)=0.3 \quad P(B_3)=0.2$

$P(A|B_1)=0.004 \quad P(A|B_2)=0.006 \quad P(A|B_3)=0.012$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \qquad B_1B_2 = B_1B_3 = B_2B_3 = \emptyset$

$$P(A) \overset{\text{θ.ο.π.}}{=} P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$
$$= 0.004 * 0.5 + 0.006 * 0.3 + 0.012 * 0.2 = 0.0062$$

π.χ. Σ' ένα ~~κουτί~~ συρτάρι υπάρχουν 4 ελαττωματικά και 21 μη ελαττωματικά εξαρτήματα για την κατασκευή προσωπικών υπολογιστών. Ο τεχνικός διαλέγει τυχαία δύο εξαρτήματα και κατασκευάζει δύο PC. Ποιά είναι η πιθανότητα το τρίτο PC που θα κατασκευαστεί να μη λειτουργεί;

Απάντηση: E_i : Το i-οστό ανταλλακτικό που επιλέγεται είναι ελαττωματικό, $i=1,2,3$

K_i : " " " " " μη ελαττωματικό, $i=1,2$

Τα ενδεχόμενα E_2K_1, E_2E_1, K_2E_1, K_2K_1 είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με τον δειγματικό χώρο. Από το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P(E_3) = P(E_3|E_2K_1)P(E_2K_1) + P(E_3|E_2E_1)P(E_2E_1) + P(E_3|K_2E_1)P(K_2E_1) + P(E_3|K_2K_1)P(K_2K_1)$$
$$= \frac{3}{23}P(E_2K_1) + \frac{2}{23}P(E_2E_1) + \frac{3}{23}P(K_2E_1) + \frac{4}{23}P(K_2K_1)$$

$$P(E_2K_1) = P(E_2|K_1)P(K_1) = \frac{4}{24}\cdot\frac{21}{25}$$

$$P(E_2E_1) = P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{3}{24}\cdot\frac{4}{25}$$

$$P(K_2E_1) = P(K_2|E_1)P(E_1) = \frac{21}{24}\cdot\frac{4}{25}$$

$$P(K_2K_1) = P(K_2|K_1)P(K_1) = \frac{20}{24}\cdot\frac{21}{25}$$

Μετά από πράξεις: $P(E_3) = \frac{4}{25}$

πχ. Αεροπλάνο έπεσε σε μια περιοχή που αποτελείται από Βουνό (Β), Δάσος (Δ), Θάλασσα (Θ). Γνωρίζουμε ότι:

$P(B) = 0.3 \qquad P(\Delta) = 0.5 \qquad P(\Theta) = 0.2$. Έστω

Ε : Εύρεση του Αεροπλάνου.

$P(E|B) = 0.6 \qquad P(E|\Delta) = 0.5 \qquad P(E|\Theta) = 0.3$

$$P(E) \overset{\Theta.O.\Pi.}{=\!=} P(E|B)P(B) + P(E|\Delta)P(\Delta) + P(E|\Theta)P(\Theta)$$
$$= 0.6 * 0.3 + 0.5 * 0.5 + 0.3 * 0.2$$
$$= 0.18 + 0.25 + 0.06 = 0.49$$

<u>Θεώρημα Bayes</u> Έστω $\{B_1, B_2, \ldots, B_\nu\}$ <u>διαμέριση</u> του δειγματικού χώρου Ω (δηλαδή $B_1 \cup \ldots \cup B_\nu = \Omega$ και $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$) τέτοια ώστε $P(B_i) > 0$, $i = 1, \ldots, \nu$.
Αν Α ενδεχόμενο με $P(A) > 0$ ισχύει:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\nu} P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, \ldots, \nu.$$

<u>Απόδειξη</u>: $P(B_i|A) = \dfrac{P(AB_i)}{P(A)} \overset{\Theta.O.\Pi.}{=\!=} \dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\nu} P(A|B_j)P(B_j)}$

<u>π.χ.</u> Ένας φοιτητής απαντάει σε ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής με 4 απαντήσεις ανά ερώτηση. Η πιθανότητα να γνωρίζει ο φοιτητής την απάντηση είναι 0.7. Όταν δεν γνωρίζει την απάντηση, απαντάει εντελώς τυχαία διαλέγοντας μια από τις 4 απαντήσεις. Αν ο φοιτητής απαντήσει σωστά σε μία ερώτηση, ποιά είναι η πιθανότητα να γνωρίζει την απάντηση;

<u>Απάντηση</u>: Α : ο φοιτητής απαντάει σωστά στην ερώτηση
Β : " " γνωρίζει τη σωστή απάντηση της ερώτησης

$P(B|A) = ;$

$P(B) = 0.7 \qquad P(B') = 1 - P(B) = 0.3$
$P(A|B) = 1 \qquad P(A|B') = \frac{1}{4} = 0.25$

Από Θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} = \frac{1*0.7}{1*0.7 + 0.25*0.3} \simeq 0.9$$

π.χ. Ένα στα χίλια άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Το τεστ γιά την διάγνωση δίνει λάθος διάγνωση στις 1% των περιπτώσεων αν το άτομο που υποβάλεται στο τεστ πάσχει πράγματι από την ασθένεια και στο 2% των περιπτώσεων αν δεν πάσχει. Αν το τέστ βγεί θετικό για ένα άτομο, ποιά είναι η πιθανότητα πράγματι να πάσχει από την ασθένεια;

Απάντηση: Έστω B_1 : Το άτομο πάσχει από την ασθένεια
B_2 : " " δεν " " " "
A : Το τεστ είναι θετικό

$P(B_1) = 0.001 \qquad P(B_2) = 0.999$

$P(A|B_1) = 0.99 \qquad P(A|B_2) = 0.02$

Από Θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0.99 * 0.001}{0.99*0.001 + 0.02*0.999} \simeq 0.0472$$

π.χ. Εργοστάσιο έχει 3 γραμμές παραγωγής.
A: το προϊόν είναι ελαττωματικό
B_i: " " κατασκευάστηκε στην γραμμή παραγωγής i, $i=1,2,3$

$P(B_1) = 0.5 \qquad P(B_2) = 0.3 \qquad P(B_3) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.004 \qquad P(A|B_2) = 0.006 \qquad P(A|B_3) = 0.012$

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \qquad B_1B_2 = B_1B_3 = B_2B_3 = \emptyset$

$$P(A) \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$
$$= 0.004 * 0.5 + 0.006 * 0.3 + 0.012 * 0.2 = 0.0062$$

$$P(B_1|A) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0.5*0.004}{\underbrace{0.5*0.004 + 0.3*0.006 + 0.2*0.012}_{0.0062}} = 0.32$$

$$P(B_2|A) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{0.0062} = \frac{0.006 * 0.3}{0.0062} \simeq 0.29$$

$$P(B_3|A) \overset{\text{Θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{0.0062} = \frac{0.012 * 0.2}{0.0062} \simeq 0.39$$

Παρατήρηση: $P(B_1) = 0.5 \longrightarrow P(B_1|A) = 0.32$ (μειώθηκε! Λογικό επειδή η 1η γραμμή παραγωγής παράγει μικρό ποσοστό ελαττωματικών σε σχέση με τις άλλη δύο)

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

<u>Ορισμός</u>: Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω.
Τα A και B λέγονται <u>ανεξάρτητα</u> αν ισχύει:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Αν $P(AB) \neq P(A)P(B)$ τα ενδεχόμενα A και B λέγονται <u>εξαρτημένα</u>.

<u>Σημείωση</u>: Αν για το ενδεχόμενο A ισχύει ότι: $P(A)=0$ ή $P(A)=1$, τότε το A είναι ανεξάρτητο από οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο B του Ω.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $P(A)=0$, τότε $P(AB) \leq P(A) = 0$ άρα $P(AB)=0$.
Οπότε ισχύει $P(AB) = P(A)P(B)$. (άρα A, B ανεξάρτητα)

Αν $P(A)=1$ από την $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ έχουμε

$$1 = 1 + P(B) - P(AB)$$

Άρα $P(B) = P(AB)$ και συνεπώς $P(AB) = P(A)P(B)$ (άρα A, B ανεξάρτητα)

<u>ΠΧ</u> Για το μάθημα "ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι" υπάρχουν δύο εξετάσεις προόδου. Αν ένας φοιτητής πετύχει και στις δύο εξετάσεις, τότε κατοχυρώνει το μάθημα.

Το ποσοστό των φοιτητών που πετυχαίνουν στην 1η πρόοδο : 68%
" " " " " " " 2η " : 54%
" " " " " κατοχύρωσαν το μάθημα : 45%

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : ο φοιτητής επέτυχε στην 1η πρόοδο
B : " " " " 2η "

$P(A) = 0.68 \quad P(B) = 0.54 \quad P(AB) = 0.45$

$$P(A)\cdot P(B) = 0.68 * 0.54 = 0.3672 \neq 0.45 = P(AB)$$

πχ. Ρίχνουμε αμερόληπτο ζάρι δύο φορές.

A : Η ένδειξη του πρώτου ζαριού είναι 3

B : Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι 5

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(AB) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} = P(AB)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Διαισθητική Εξήγηση: Αν το αποτέλεσμα της ρίψης του 1ου ζαριού είναι 3 (ή 1, 2, 4) είμαστε ευχαριστημένοι, επειδή σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει πιθανότητα 1/6 να πετύχουμε άθροισμα = 5. Αν όμως το αποτέλεσμα της ρίψης του 1ου ζαριού είναι 5 ή 6, δεν υπάρχει καμμία περίπτωση να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αν

Γ : Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι 7

$$P(A)P(\Gamma) = \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{36} = \frac{1}{36} = P(A\Gamma)$$ Άρα A, Γ ανεξάρτητα.

Πρόταση: Αν A, B δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του Ω, Τότε:

α.) A και B' ανεξάρτητα

β.) A' και B ανεξάρτητα

γ.) A' και B' ανεξάρτητα.

Απόδειξη: α) $P(AB') = P(A)P(B') \Leftrightarrow P(A) - P(AB) = P(A)[1-P(B)] \Leftrightarrow \underbrace{P(AB) = P(A)P(B)}_{\text{ισχύει}}$

β) $P(A'B) = P(A')P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(AB) = [1-P(A)]P(B) \Leftrightarrow \underbrace{P(AB) = P(A)P(B)}_{\text{ισχύει}}$

γ) $P(A'B') = P(A')P(B') \Leftrightarrow$

$P[(A\cup B)'] = [1-P(A)][1-P(B)] \Leftrightarrow$

$1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B) \Leftrightarrow$

$P(AB) = P(A)P(B)$