ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Προτεινόμενο βιβλίο: Μάρκου Κούτρα "ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ και ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"

Η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο την μελέτη φαινομένων, η εξέλιξη των οποίων επηρεάζεται από την τύχη.

Ιστορική Αναδρομή: Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι το 3000 π.Χ. χρησιμοποιούσαν τον «αστράγαλο» (κόκκαλο ζώου) με τέσσερις πλευρές για να παίζουν τυχερά παιχνίδια.

ζάρι (1600 π.Χ.)

κάρτες (τραπουλόχαρτα) εμφανίζονται μεταξύ 7ου-10ου αιώνα μ.Χ. Κίνα

Pascal (1623-1662) — Fermat (1601-1665) "αλληλογραφία για το πρόβλημα του Chevalier de Méré"

Christian Huyghens (1629-1695)

Bernoulli (1654-1705)

de Moivre (1667-1754)

Laplace (1749-1827)

Poisson (1781-1840)

Gauss (1777-1855)

Chebyshev (1821-1894)

Markov (1856-1922)

von Mises (1883-1953)

Kolmogorov (1903-1987) "Αξιωματική Θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων το 1933."

Πείραμα Τύχης: Πείραμα το αποτέλεσμα του οποίου εξαρτάται από την τύχη.

Δειγματικός Χώρος Ω ενός πειράματος τύχης: Σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης

Δειγματικά Σημεία: Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου

Ενδεχόμενα ή Γεγονότα (συμβολισμός Α, Β, Γ, ...): Υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω.

Απλά ή Στοιχειώδη Ενδεχόμενα: Ενδεχόμενα που αποτελούνται από μόνον ένα στοιχείο, δηλαδή $A = \{\omega\}$.

Σύνθετα Ενδεχόμενα: Ενδεχόμενα που περιέχουν περισσότερα από ένα στοιχείο.

π.χ. Ρίψη ζαριού

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Δειγματικά Σημεία: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$: στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω.

$B_1 = \{2, 4, 6\}$ σύνθετο ενδεχόμενο "εμφανίζεται άρτια ένδειξη"

$B_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ σύνθετο ενδεχόμενο "εμφανίζεται ένδειξη ≥ 3"

<u>π.χ.</u> <u>Ρίψη νομίσματος τρεις φορές</u>

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται τρία ίδια αποτελέσματα"

$$A = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται δύο ακριβώς κορώνες"

$$B = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$$

Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα οι δειγματικοί χώροι είναι <u>πεπερασμένοι.</u>

<u>π.χ.</u> <u>Ρίψη νομίσματος μέχρις ότου εμφανιστούν για πρώτη φορά γράμματα.</u>

$\Omega = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ, ΚΚΚΓ, \ldots\}$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται γιά πρώτη φορά γράμματα στην τέταρτη δοκιμή"

$$A = \{ΚΚΚΓ\}$$ απλό ενδεχόμενο

Το ενδεχόμενο "η διαδικασία τερματίζεται μέχρι την 3η δοκιμή"

$$B = \{Γ, ΚΓ, ΚΚΓ\}$$

Το ενδεχόμενο "χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερις δοκιμές για να τερματιστεί το πείραμα"

$$Γ = \{ΚΚΚΓ, ΚΚΚΚΓ, ΚΚΚΚΚΓ, \ldots\}$$

Σε αυτό το πείραμα έχουμε <u>απείρως αριθμήσιμο δειγματικό χώρο</u>, δηλαδή είναι άπειρο σύνολο με ίδιο πληθυκό αριθμό με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

<u>πχ.</u> <u>Χρόνος (σε ώρες) μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί ένας λαμπτήρας.</u>

$$\Omega = \{t : t \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα είναι το πολύ 500 ώρες"

$$A = \{t : 0 \leq t \leq 500\} = [0, 500]$$

Το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα υπερβαίνει τις 300 ώρες"

$$B = \{t : t \geq 300\}$$

Σε αυτό το πείραμα έχουμε <u>συνεχή δειγματικό χώρο,</u> δηλαδή άπειρο σύνολο μη αριθμήσιμο.

<u>πχ.</u> <u>Διαφορετικοί δειγματικοί χώροι για ένα πείραμα τύχης</u>

Έκθεση αυτοκινήτων με δύο αυτοκίνητα προς πώληση και δύο πωλητές α και β.

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (0,2)\}$$ $(x,y) \in \Omega$: ο πωλητής α θα πουλήσει x αυτοκίνητα την επόμενη εβδομάδα και ο πωλητής β θα πουλήσει y αυτοκίνητα την επόμενη εβδομάδα.

$$\Omega = \{0,1,2\}$$ $x \in \Omega$: αριθμός αυτοκινήτων που θα πουληθούν

Το ενδεχόμενο "την επόμενη εβδομάδα θα πουληθούν και τα δύο αυτοκίνητα"

$$A = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$$ στην 1η περίπτωση

$$A = \{2\}$$ στην 2η περίπτωση

Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

Έστω $A \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο του Ω

Αν το αποτέλεσμα του πειράματος $\omega \in A$ θα λέμε ότι "συνέβη το ενδεχόμενο A" ή "πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο A".

$A \subseteq B$ (αν πραγματοποιηθεί το A τότε θα πραγματοποιηθεί και το B).

$A = B$ αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Ω : βέβαιο γεγονός (πάντα συμβαίνει)

$\emptyset$: αδύνατο γεγονός

Ισχύει ότι: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, για κάθε ενδεχόμενο A.

Ορισμός: Ένωση δύο ενδεχομένων A, B είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν τουλάχιστον ένα από τα A, B πραγματοποιείται.

Συμβολισμός: $A \cup B$

Γενίκευση για ν ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_\nu$

$$A_1 \cup \dots \cup A_\nu = \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$$

Ορισμός: Τομή δύο ενδεχομένων A, B λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα A και B.

Συμβολισμός: AB ή $A \cap B$

Γενίκευση για ν ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_\nu$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\nu = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$$

$$A_1 A_2 \cdots A_\nu = \prod_{i=1}^{\nu} A_i$$

<u>Ορισμός</u>: Τα ενδεχόμενα A, B λέγονται <u>ξένα</u> ή <u>ασυμβίβαστα</u> αν $AB = \emptyset$

<u>Ορισμός</u>: <u>Συμπλήρωμα</u> του ενδεχόμενου A είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνον αν <u>δεν</u> πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A.

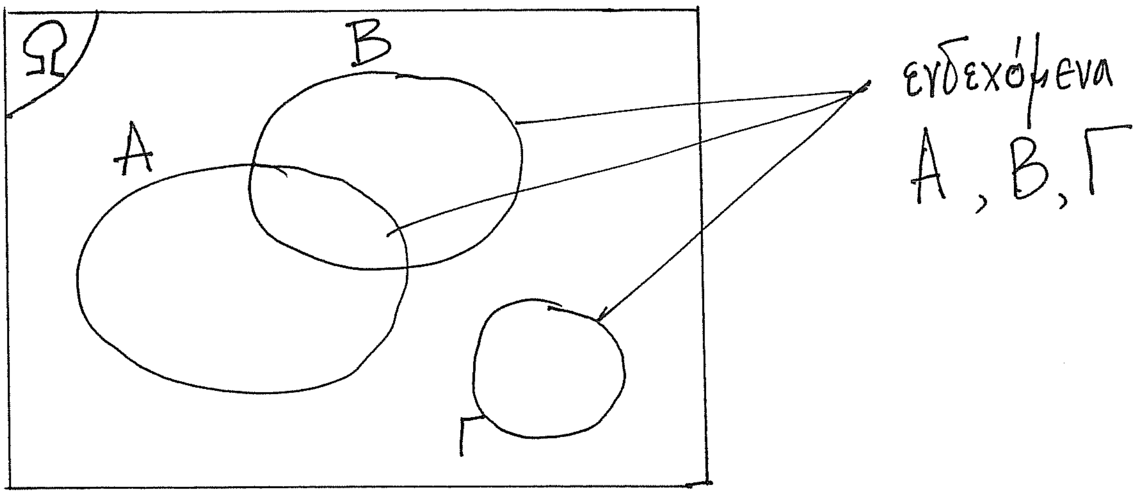
<u>Συμβολισμός</u>: A' ή $\overline{A}$ ή A^c

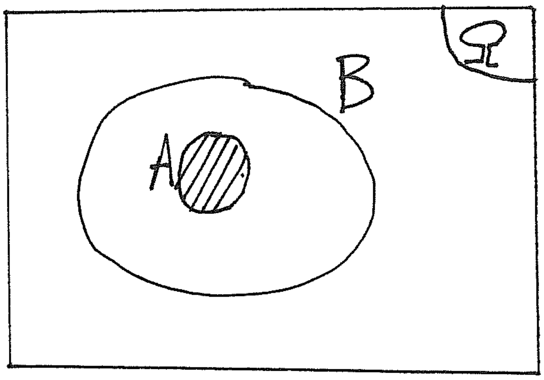
<u>Ορισμός</u>: <u>Διαφορά</u> του ενδεχόμενου B από το ενδεχόμενο A λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά δεν πραγματοποιείται το B.

<u>Συμβολισμός</u>: $A - B$

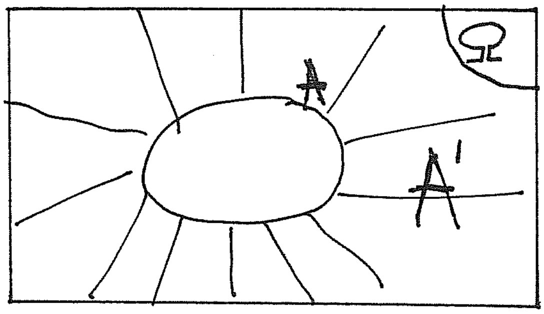
<u>Ισχύει</u>: $A - B = AB'$

Τα <u>διαγράμματα Venn</u> είναι χρήσιμα επειδή προσφέρουν εποπτεία.

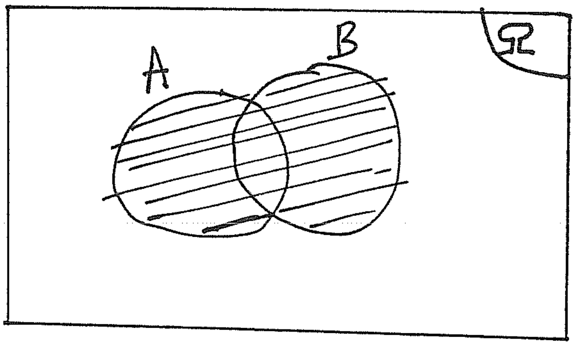




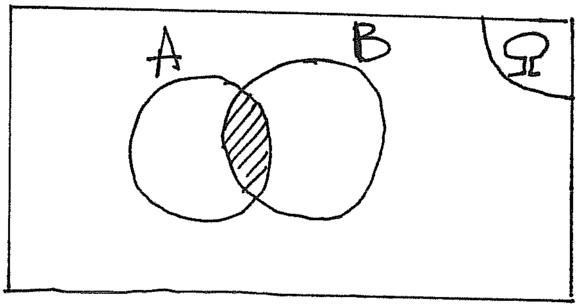
$A \subseteq B$



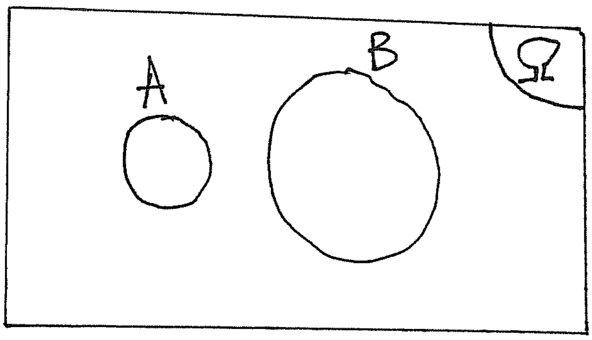
A' : συμπλήρωμα του A



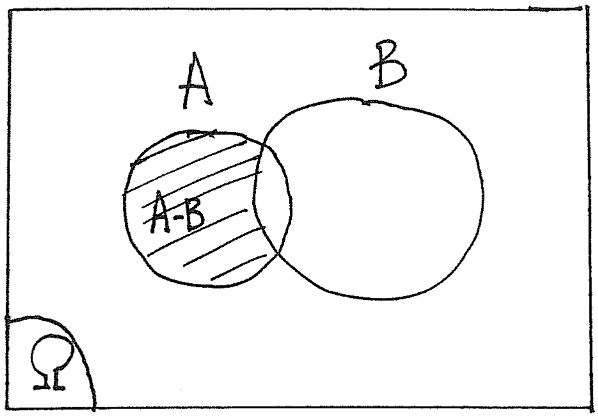
$A \cup B$: ένωση των A και B



AB : Τομή των A και B

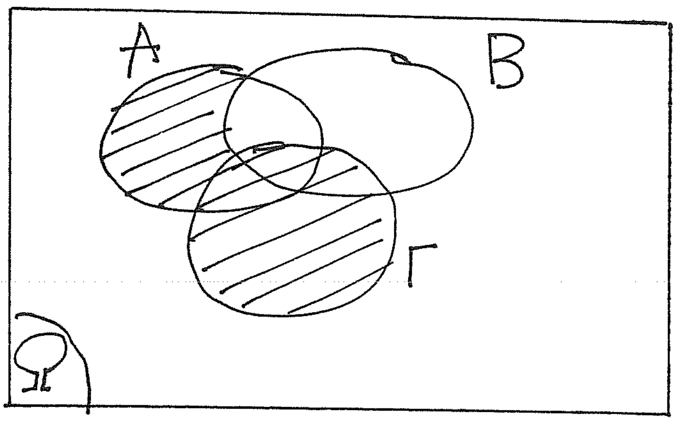


Τα ενδεχόμενα A και B ξένα



<u>Διαφορά</u> του B απο το A

<u>πχ.</u> A, B, Γ ενδεχόμενα του Ω. Το ενδεχόμενο "συμβαίνει το A και όχι το B ή συμβαίνει το Γ" αντιστοιχεί στο σύνολο $(A-B)\cup\Gamma$



<u>Ιδιότητες πράξεων μεταξύ ενδεχομένων</u>:

$A\cup A = A \qquad AA' = \emptyset$

$A\cup\emptyset = A \qquad A\emptyset = \emptyset$

$A\cup\Omega = \Omega \qquad A\Omega = A$

$A\cup B = B\cup A \qquad AB = BA$ "αντιμεταθετική ιδιότητα"

$(A\cup B)\cup\Gamma = A\cup(B\cup\Gamma), \qquad A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$ "προσεταιριστική ιδιότητα"

$A\cup(B\Gamma) = (A\cup B)(A\cup\Gamma), \qquad A(B\cup\Gamma) = (AB)\cup(A\Gamma)$ "~~προ~~ επιμεριστική ιδιότητα"

$A\cup A' = \Omega \qquad AA' = \emptyset$

$A\subseteq B$ και $B\subseteq\Gamma \Rightarrow A\subseteq\Gamma$

$A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$ και αντίστροφα

$A\subseteq B \Rightarrow AB = A$ και $A\cup B = B$

Πρόταση (Τύποι de Morgan):

$$(A \cup B)' = A'B' \quad * \quad , \quad (AB)' = A' \cup B'$$

Απόδειξη της * :

$$\omega \in (A \cup B)' \Rightarrow \omega \notin A \cup B \Rightarrow \begin{matrix} \omega \notin A \\ \omega \notin B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega \in A' \\ \omega \in B' \end{matrix} \Rightarrow \omega \in A'B'$$

$$\omega \in A'B' \Rightarrow \begin{matrix} \omega \in A' \\ \omega \in B' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega \notin A \\ \omega \notin B \end{matrix} \Rightarrow \omega \notin (A \cup B) \Rightarrow \omega \in (A \cup B)'$$

Γενίκευση: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu)' = A_1' A_2' \cdots A_\nu'$

$$(A_1 A_2 \cdots A_\nu)' = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_\nu'$$

π.χ. A, B, Γ ενδεχόμενα του Ω. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$(A'B')' \cup (AB'\Gamma')'$$

Απάντηση:

$$(A'B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B$$

$$(AB'\Gamma')' = A' \cup (B')' \cup (\Gamma')' = A' \cup B \cup \Gamma$$

$$(A'B')' \cup (AB'\Gamma')' = (A \cup B) \cup (A' \cup B \cup \Gamma) = (A \cup A') \cup (B \cup B) \cup \Gamma$$

$$= \Omega \cup B \cup \Gamma = \Omega$$

Άσκηση: $A, B, Γ$ ενδεχόμενα του $Ω$. Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα με χρήση πράξεων (ενώσεις, τομές, συμπληρώματα) μεταξύ των $A, B, Γ$.

α. Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα $A, B, Γ$:

$$A \cup B \cup Γ$$

β. πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα $A, B, Γ$:

$$(AB'Γ') \cup (A'BΓ') \cup (A'B'Γ)$$

γ. Κανένα από τα $A, B, Γ$ δεν συμβαίνει:

$$(A \cup B \cup Γ)'$$

δ. πραγματοποιούνται ακριβώς δύο από τα $A, B, Γ$:

$$(ABΓ') \cup (A'BΓ) \cup (AB'Γ)$$

ε. πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B όχι όμως το $Γ$:

$$(A \cup B)Γ'$$

στ. πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B και ένα τουλάχιστον από τα $B, Γ$:

$$(A \cup B)(B \cup Γ)$$