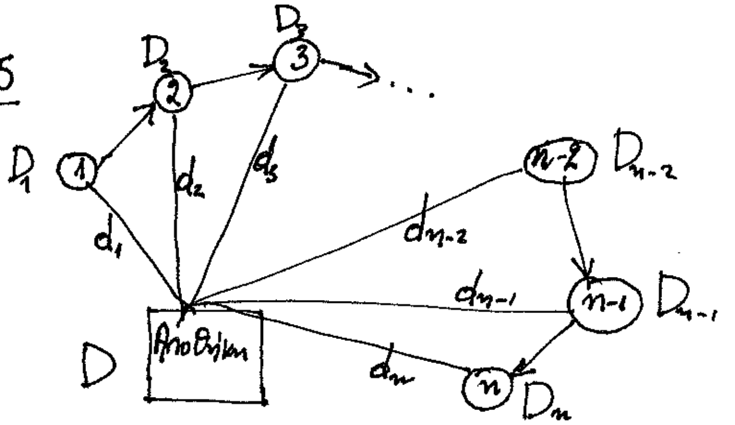
Άσκηση 5



Θεωρούμε ότι ένα φορτηγό προμηθεύει ένα προϊόν σε n καταστήματα. Το i-οστό κατάστημα πρέπει να προμηθευτεί με D_i τεμάχια του προϊόντος $i=1,\dots,n$. Η ποσότητα που προμηθεύεται το φορτηγό από την αποθήκη ισούται με D, όπου $D \geqslant \max_{1\leq i\leq n} D_i$. Η απόσταση του $(i+1)$-καταστήματος από το i κατάστημα ισούται με $d_{i,i+1}$, $i=1,\dots,n-1$. Η απόσταση του i καταστήματος από την αποθήκη ισούται με d_i, $i=1,\dots,n$. Τα καταστήματα προμηθεύονται το προϊόν κατ' αύξουσα σειρά. Το φορτηγό επισκέπτεται κάθε κατάστημα μία φορά. Το πρόβλημα είναι η εύρεση της ελάχιστης διαδρομής από την αποθήκη μέχρι το n-οστό κατάστημα.

Απάντηση: Έστω $V(x,t)$, $x=0,\dots,D-D_t$, $t=1,2,\dots,n$, ελάχιστη διαδρομή από το κατάστημα t μέχρι το κατάστημα n αν μετά την εξυπηρέτηση του καταστήματος t έχουν απομείνει στο φορτηγό $x\in\{0,\dots,D-D_t\}$ τεμάχια του προϊόντος.

$$V(x,n)=0, \quad x=0,1,\dots,D-D_n$$

$$V(x,n-1)=\begin{cases} d_{n-1,n} & \text{αν } x\geqslant D_n \\ d_{n-1}+d_n & \text{αν } x<D_n \end{cases}$$

$$V(x,t)=\begin{cases} d_t+d_{t+1}+V(D-D_{t+1},t+1), & \text{αν } x<D_{t+1} \\ \min\Big\{\underbrace{d_{t,t+1}+V(x-D_{t+1},t+1)}_{\text{πηγαίνω στον επόμενο πελάτη}},\ \underbrace{d_t+d_{t+1}+V(D-D_{t+1},t+1)}_{\text{πηγαίνω στην αποθήκη για ανεφοδιασμό και μετά στον επόμενο πελάτη } t+1.}\Big\} & \text{αν } x\geqslant D_{t+1} \end{cases}$$

$t=1,\dots,n-2$

Υπολογίζουμε: $V(x,t)$, για $t=n-2,\dots,1$, $x=0,\dots,D-D_t$

Ελάχιστη Διαδρομή: $d_1+V(D-D_1,1)$.

<u>Άσκηση 7</u> Ένα δοχείο αρχικά περιέχει n άσπρες και m μαύρες μπάλλες. Βγάζουμε κατά τυχαίο τρόπο και χωρίς επανάθεση μία-μία τις μπάλλες από το δοχείο. Αν επιλεγεί μία άσπρη μπάλλα τότε κερδίζουμε δύο χρηματικές μονάδες ενώ αν επιλεγεί μία μαύρη μπάλλα χάνουμε τρεις χρηματικές μονάδες. Οποιαδήποτε στιγμή έχουμε το δικαίωμα να εγκαταλείψουμε το παιχνίδι. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο συνολικό κέρδος. Εξηγήσατε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να λυθεί το πρόβλημα με των μέθοδο των δυναμικού προγραμματισμού.

<u>Απάντηση</u>: Έστω ότι στο δοχείο περιέχονται x, $0\leq x\leq n$ άσπρες και y, $0\leq y\leq m$ μαύρες μπάλλες. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού δίνεται παρακάτω:

$$V(x,y) = \max\left\{ \underbrace{\frac{2x-3y}{x+y} + \frac{x}{x+y}V(x-1,y) + \frac{y}{x+y}V(x,y-1)}_{\text{επιλέγω μία σφαίρα}},\ \underbrace{0}_{\text{εγκαταλείπω το παιχνίδι}} \right\}$$

$1\leq x\leq n,\quad 1\leq y\leq m,$

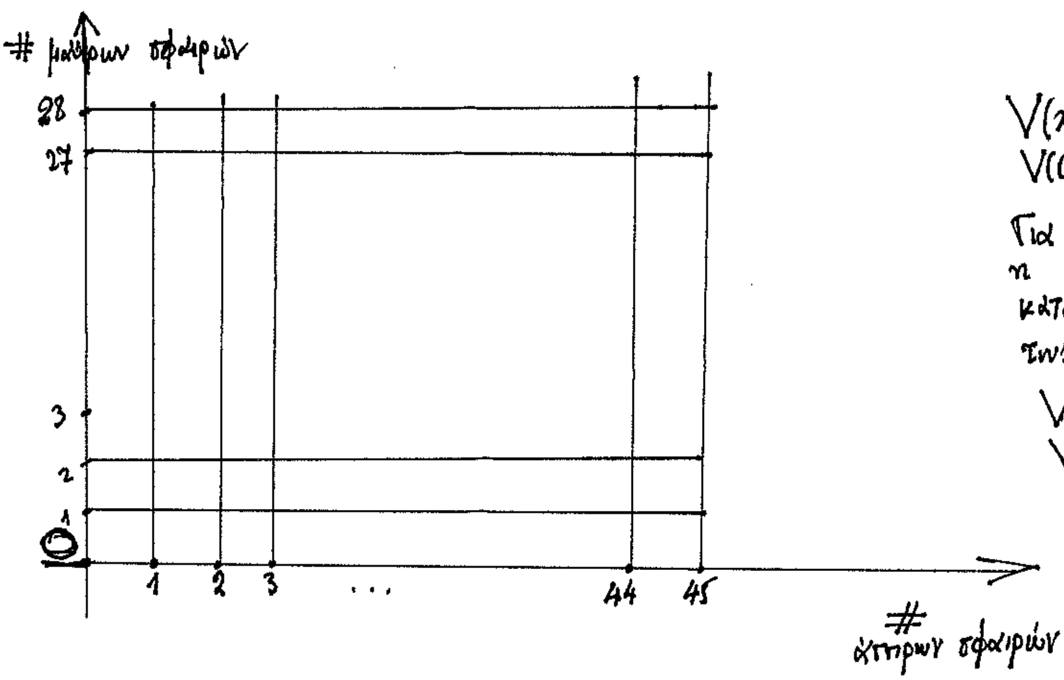
$V(0,y) = 0,\quad 0\leq y\leq m,$

$V(x,0) = 2x,\quad 0\leq x\leq n,$

όπου $V(x,y)$, $0\leq x\leq n$, $0\leq y\leq m$, είναι το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος αν στο δοχείο υπάρχουν x άσπρες και y μαύρες μπάλλες.

Οι υπολογισμοί γίνονται ως εξής:

<u>π.χ.</u> Αν $n=45$, $m=28$,



$V(x,0)=2x,\quad 0\leq x\leq 45,$
$V(0,y)=0,\quad 0\leq y\leq 28,$

Για να βρούμε ποια είναι η βέλτιστη ενέργεια στην κατάσταση $(45,28)$ κάνουμε τους εξής υπολογισμούς:

$V(1,1), V(1,2), \dots, V(1,28)$
$V(2,1), V(2,2), \dots, V(2,28)$
$\vdots$
$V(44,1), V(44,2), \dots, V(44,28)$
$V(45,1), V(45,2), \dots, V(45,28)$

<u>Άσκηση 8.</u> Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων μιάς διαδικασίας είναι το $S = \{(x,y) :$ x, y μη αρνητικοί ακέραιοι με την ιδιότητα $x+y \leq N\} - \{(0,0)\}$, όπου N είναι ένας φυσικός αριθμός.

Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση (x,y) με $x+y<N$ μπορούμε να προβούμε στην ενέργεια 0 ή στην ενέργεια 1.

Η ενέργεια 0 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(x, y+1)$ με πιθανότητα $y/(x+y)$ ή στην κατάσταση $(x+1, y)$ με πιθανότητα $x/(x+y)$. Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος είναι ίσο με $x/(x+y)$.

Η ενέργεια 1 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(x, y+1)$ με πιθανότητα 1. Το αντίστοιχο κόστος είναι ίσο με K, όπου K είναι μία θετική σταθερά.

Η διαδικασία λήγει όταν $x+y=N$.

Το πρόβλημα είναι η εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος όταν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι μία κατάσταση (x,y) τέτοια ώστε $x+y<N$.

Βρείτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα.

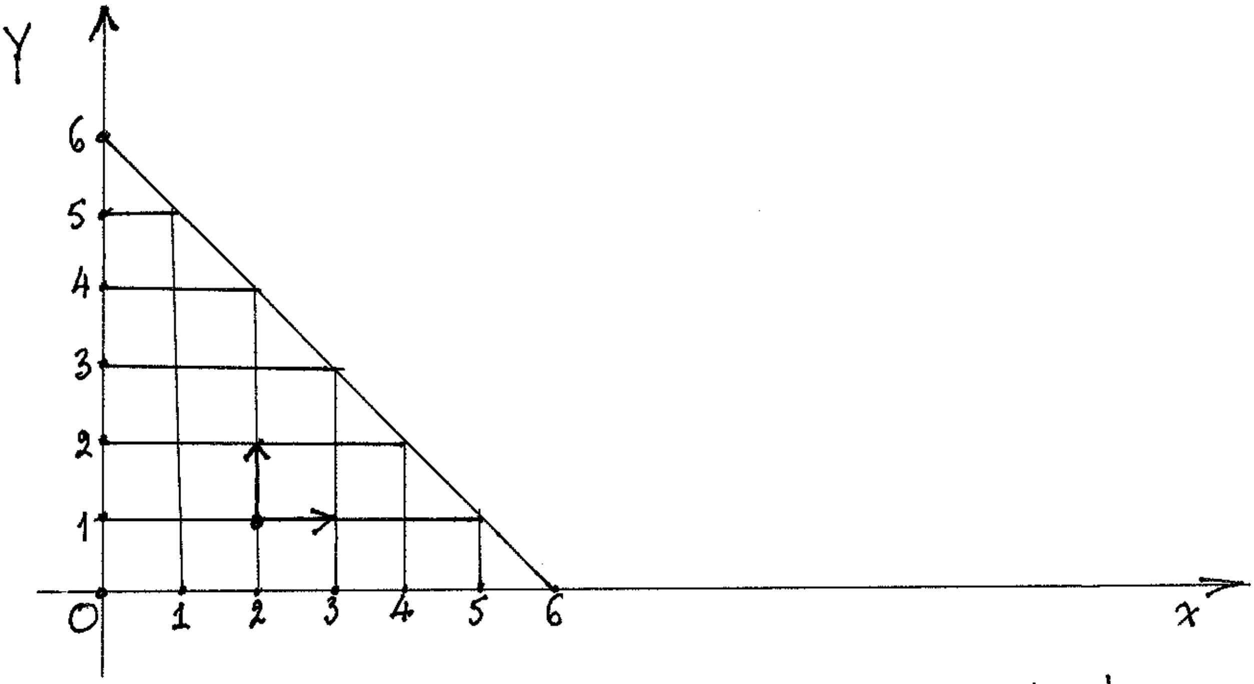
<u>Απάντηση</u>: Έστω $V(x,y)$, $0<x+y\leq N$, το συνολικό ελάχιστο αναμενόμενο κόστος μέχρι την λήξη της διαδικασίας αν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση (x,y), $0<x+y\leq N$.

Προφανώς: $V(x, N-x) = 0$, $x = 0, 1, \dots, N$.

Αν είμαστε στην κατάσταση (x,y), $0<x+y<N$, η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V(x,y) = \min\Big\{ \underbrace{\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+y}V(x+1,y) + \frac{y}{x+y}V(x,y+1)}_{\text{ενέργεια } 0},\ \underbrace{k+V(x,y+1)}_{\text{ενέργεια } 1} \Big\}$$

Ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Έστω $N=6$, $k=1$.



π.χ. Αν είμαστε στην κατάσταση $(2,1)$, η ενέργεια 0 μεταφέρει ~~στη~~ την διαδικασία στην κατάσταση $(3,1)$ με πιθανότητα $2/3$ ή στην ~~στην~~ κατάσταση $(2,2)$ με πιθανότητα $1/3$, ενώ η ενέργεια 1 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(2,2)$ με πιθανότητα 1. Τα αντίστοιχα αναμενόμενα κόστη είναι ίσα με $2/(2+1) = 2/3$ και

$k=1$, αντίστοιχα.

Οι υπολογισμοί γίνονται ως εξής:

$V(6,0) = V(5,1) = V(4,2) = V(3,3) = V(2,4) = V(1,5) = V(0,6) = 0$

$V(5,0),\ V(4,1),\ V(3,2),\ V(2,3),\ V(1,4),\ V(0,5)$

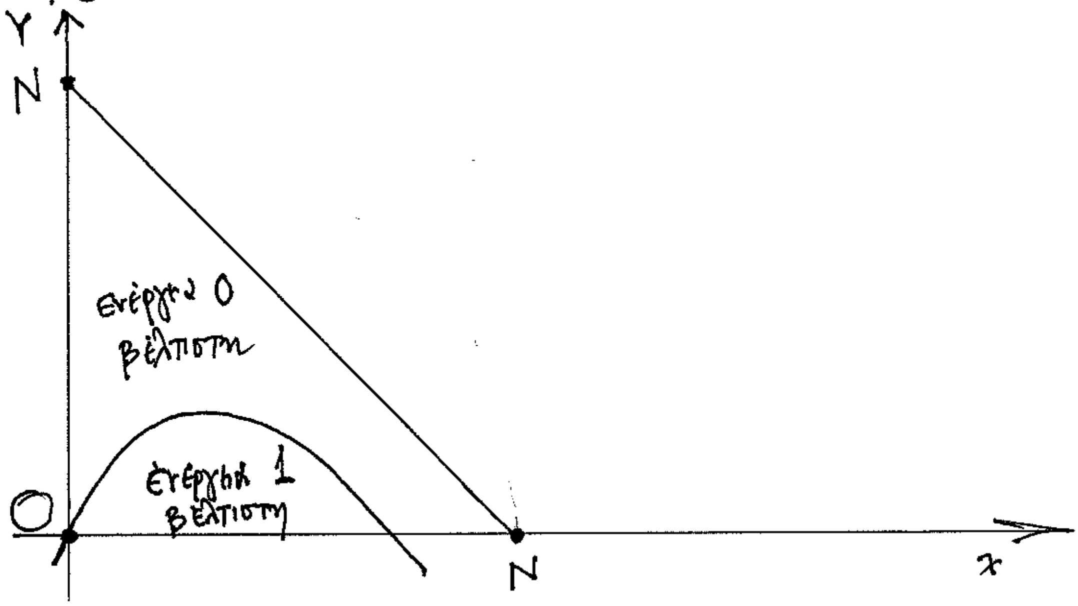
$V(4,0),\ V(3,1),\ V(2,2),\ V(1,3),\ V(0,4)$

$V(3,0),\ V(2,1),\ V(1,2),\ V(0,3)$

$V(2,0),\ V(1,1),\ V(0,2)$

$V(1,0),\ V(0,1)$

Αν κάνουμε τους υπολογισμούς, διαπιστώνουμε ότι η μορφή της βέλτιστης πολιτικής είναι η εξής:



<u>Άσκηση 9</u>. Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων μιας διαδικασίας είναι το $S = \{(x,y) : x, y$ μη αρνητικοί ακέραιοι$\} - \{(0,0)\}$.

Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση (x,y) με $xy \neq 0$ μπορούμε να προβούμε στην ενέργεια 0 ή στην ενέργεια 1.

Η ενέργεια 0 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(x-1, y+1)$ με πιθανότητα $x/(x+p)$ ή στην κατάσταση $(x, y-1)$ με πιθανότητα $\varphi/(x+\varphi)$, όπου p είναι μία θετική σταθερά. Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος είναι ίσο με $x/(x+p)$.

Η ενέργεια 1 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(x, y-1)$ με πιθανότητα 1. Το αντίστοιχο κόστος είναι ίσο με $k > 0$.

Η διαδικασία λήγει όταν $x = 0$ ή $y = 0$.

Το πρόβλημα είναι η εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος όταν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση (x, y), τέτοια ώστε $xy \neq 0$.

Βρείτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα.

Απάντηση:

Έστω $V(x,y)$, $x\geq 0, y\geq 0$, το ελάχιστο αναμενόμενο συνολικό κόστος μέχρι την λήξη της διαδικασίας αν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση (x,y). Προφανώς

$$V(x,0)=V(0,y)=0, \quad x,y=0,1,2,\dots$$

Έστω ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση (x,y) με $x\cdot y\neq 0$.

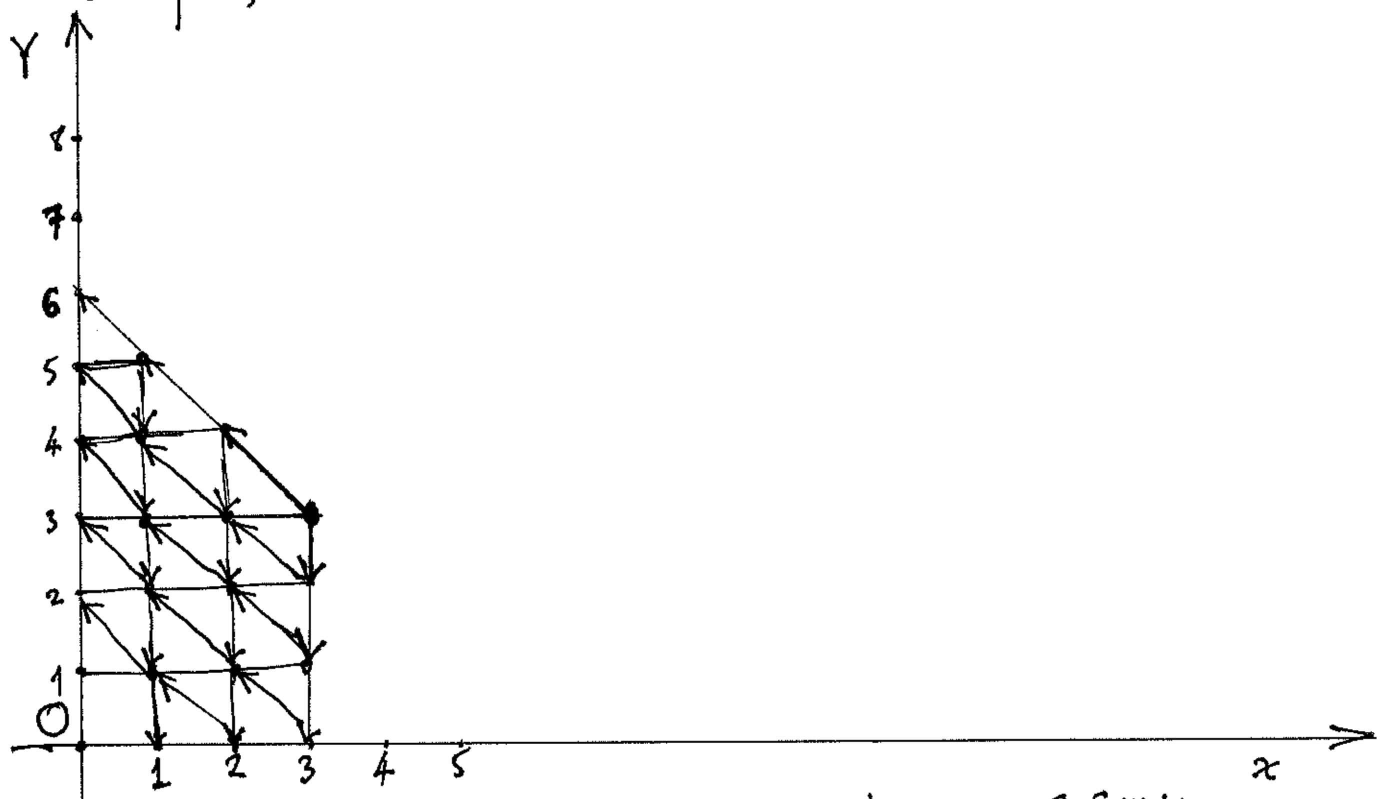
Η Εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V(x,y)=\min\left\{\frac{x}{x+p}+\frac{x}{x+p}V(x-1,y+1)+\frac{p}{x+p}V(x,y-1),\ K+V(x,y-1)\right\}$$

$\longleftarrow$ ενέργεια 0 $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ ενέργεια 1 $\longrightarrow$

Ας δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα με αρχική κατάσταση $(x,y)=(3,3)$

Έστω $p=1$, $K=0.5$



Πχ. Στην κατάσταση $(3,3)$ η ενέργεια 0 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(2,4)$ με πιθανότητα $3/(3+1)=3/4$ ή στην κατάσταση $(3,2)$ με πιθανότητα $1/(3+1)=1/4$, ενώ η ενέργεια 1 μεταφέρει την διαδικασία στην κατάσταση $(3,2)$ με πιθανότητα 1 με κόστος $K=0.5$.

Για νά βρούμε <u>ποιά</u> είναι η βέλτιστη ενέργεια στην κατάσταση (3, 3) πρέπει να γίνουν υπολογισμοί με την εξής σειρά :

$V(1,1)$, $V(1,2)$, $V(1,3)$, $V(1,4)$, $V(1,5)$

$V(2,1)$, $V(2,2)$, $V(2,3)$, $V(2,4)$

$V(3,1)$, $V(3,2)$, $V(3,3)$