Άσκηση 3 (σελ. 18 των σημειώσεων)

Να γραφούν τα παρακάτω π.γ.π. στην κανονική της μορφή:

(i)
$$\min(x_1 - x_2 + 3x_3)$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$
$$x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_2, x_3 \geq 0$$

Απάντηση: $x_1 = x_1' - x_1''$ $\quad x_1', x_1'' \geq 0$

Κανονική μορφή:
$$-\max(-x_1' + x_1'' - x_2 + 3x_3)$$
$$2x_1' - 2x_1'' + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2 + x_3 - x_5 = 2$$
$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(ii)
$$\begin{array}{l} \max(3x_1 - 4x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 40 \\ 2x_1 - 6x_2 = 25 \\ |3x_1 - x_2 + 2x_3| \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \max(3x_1 - 4x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 40 \\ 2x_1 - 6x_2 = 25 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \max(3x_1 - 4x_2 + x_3) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 40 \\ 2x_1 - 6x_2 = 25 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 60 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0 \end{array}$$

$x_3' = -x_3$

$$\iff \begin{array}{l} \max(3x_1 - 4x_2 - x_3') \\ x_1 + 2x_2 - x_3' + x_4 = 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3' - x_5 = 40 \\ 2x_1 - 6x_2 = 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3' + x_6 = 60 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3' + x_7 = 60 \\ x_1, x_2, x_3', x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

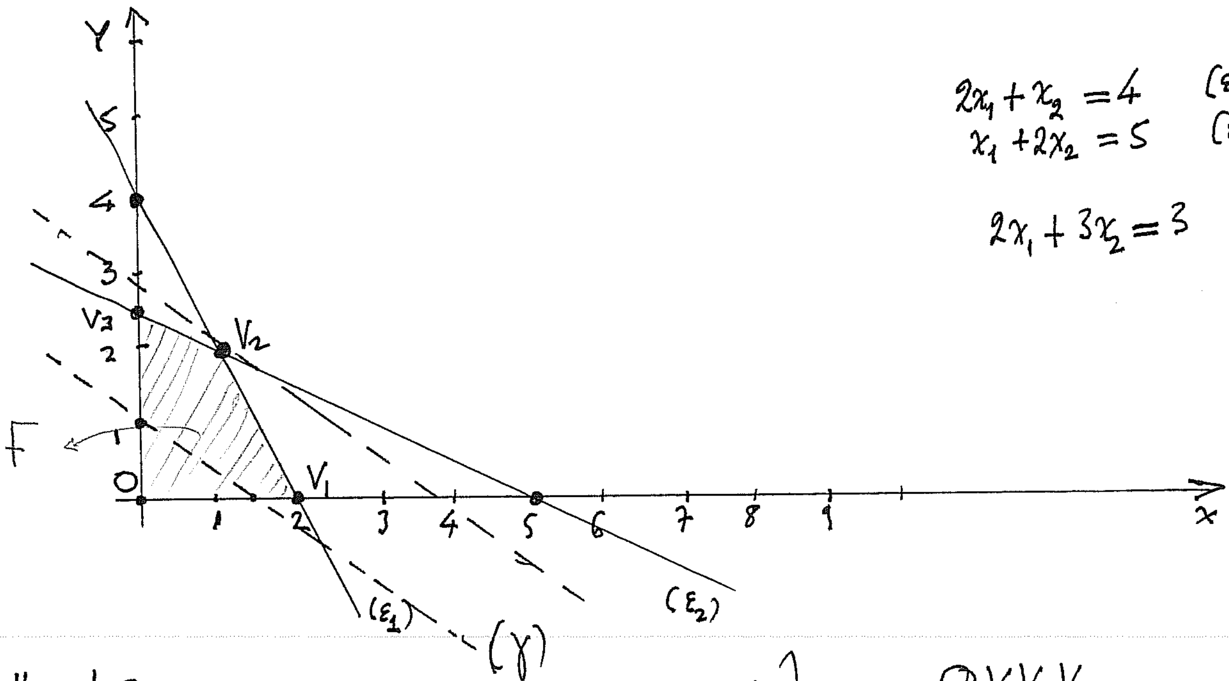
Άσκηση: Θεωρούμε το παρακάτω π.γ.π.

$$\max(2x_1 + 3x_2)$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(i) Επιλύστε το πρόβλημα γραφικά

$$2x_1 + x_2 = 4 \quad (\varepsilon_1)$$
$$x_1 + 2x_2 = 5 \quad (\varepsilon_2)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (\gamma)$$



Η εφικτή περιοχή F είναι το τετράπλευρο $OV_1V_2V_3$

Σχεδιάζουμε την ευθεία (γ) $2x_1 + 3x_2 = 3$

Αυξάνοντας τον σταθερό όρο παίρνουμε παράλληλη ευθεία προς την (γ). Έτσι απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων.

~~Ε~~ Η άριστη λύση είναι η κορυφή V_2 της εφικτής περιοχής.

Οι συντεταγμένες της V_2 ~~ευ~~ βρίσκονται από την λύση του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x_2 = 6 \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 5 - 2 \times 2 = 1 \end{array}$$

Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z = 2 * 1 + 3 * 2 = 8$$

(ii) Γράψτε το πρόβλημα σε κανονική μορφή:

$$\begin{cases} \max(2x_1 + 3x_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(iii) Βρείτε όλες τις βασικές εφικτές λύσεις του π.γ.π. που είναι γραμμένο σε κανονική μορφή και εντοπίστε την άριστη λύση.

<u>Απάντηση</u>: Κατ' αρχάς παρατηρούμε από τους περιορισμούς ότι:

$$0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \quad 0 \leq x_3 \leq 4, \quad 0 \leq x_4 \leq 5.$$

Συνεπώς η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο. Άρα η άριστη λύση είναι κορυφή (δηλ. βασική εφικτή λύση) της εφικτής περιοχής. Βρίσκουμε όλες τις βασικές εφικτές λύσεις παίρνοντας ανά δύο τις στήλες και λύνοντας το αντίστοιχο 2×2 γραμμικό σύστημα.

(i) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ $\quad (1,2,0,0)'$ βασ. εφικτή λύση
Τιμή της αντικειμ. συνάρτησης $z = 8$

(ii) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4-10 = -6 \\ x_1 = 5 \end{cases}$ $\quad (5,0,-6,0)'$ βασική λύση όχι εφικτή.

(iii) $\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 5-2 = 3 \end{cases}$ $\quad (2,0,0,3)'$ βασική εφικτή λύση
$z = 4$

(iv) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4 - 5/2 = 3/2 \\ x_2 = 5/2 \end{cases}$ $\quad (0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0)'$ βασική εφικτή λύση
$z = 3 * \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

(v) $\begin{cases} x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4 \\ x_4 = 5-8 = -3 \end{cases}$ $\quad (0,4,0,-3)'$ βασική λύση όχι εφικτή

(vi) $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$ $\quad (0,0,4,5)'$ βασική εφικτή λύση
$z = 0$

<u>Παρατηρούμε ότι</u> η $(1,2,0,0)'$ είναι <u>άριστη λύση</u> με ~~άριστη~~ μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 8$.