ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Επ. Κυριακίδης, Τμήμα Στατιστικής, Ο.Π.Α.
Αν. Καθηγητής

Ενδεικτική Βιβλιογραφία

Δ. Φακίνου, Α. Οικονόμου, ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ, Αθήνα 2003

F.S. Hillier, G.J. Lieberman, INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH, 8th Edition, Mc Graw-Hill, New York, 2005.

Αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας: Κατασκευή, Μελέτη, Ανάλυση και Εφαρμογή κατάλληλων μαθηματικών μοντέλων με στόχο τον βέλτιστο σχεδιασμό και έλεγχο οργανωμένων συστημάτων.

Αρχικά η Επιχειρησιακή Έρευνα αναπτύχθηκε κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο. Αναπτύχθηκαν μαθηματικές τεχνικές για την επίτευξη του βέλτιστου δυνατού αποτελέσματος σε στρατιωτικές επιχειρήσεις. Οι τεχνικές αυτές αργότερα χρησιμοποιήθηκαν επιτυχώς από επιχειρήσεις, δημόσιους οργανισμούς σε προβλήματα ελαχιστοποίησης κόστους ή μεγιστοποίησης κέρδους.
Η ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών διευκόλυνε τις εφαρμογές.
Η Επιχειρησιακή Έρευνα έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη των μαθηματικών.
Σήμερα αποτελεί έναν αυτοτελή κλάδο των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Μια Μελέτη έχει τις εξής φάσεις:

1. Κατανόηση της λειτουργίας ενός συστήματος. Συγκεκριμενοποίηση του προβλήματος. Συλλογή των απαραίτητων δεδομένων.
2. Κατασκευή του κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου
   - στοχαστικό (όταν υπεισέρχεται τυχαιότητα)
   - προσδιοριστικό ή ντετερμινιστικό (όταν δεν υπεισέρχεται καμμία τυχαιότητα)
3. Επίλυση του αντίστοιχου μαθηματικού προβλήματος
4. Ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών (αλγορίθμων), όπου αυτό είναι απαραίτητο.
5. Έλεγχος της καταλληλότητας του μοντέλου και αναπροσαρμογή του αν αυτό δεν απεικονίζει ικανοποιητικά το σύστημα

Εμείς θα ασχοληθούμε με τις Φάσεις 2, 3, 4. Για τη μελέτη προσδιοριστικών μοντέλων χρειάζονται γνώσεις Γραμμικής Άλγεβρας, Μαθηματικής Ανάλυσης, Διαφορικών Εξισώσεων κλπ. Για τη μελέτη στοχαστικών μοντέλων χρειάζονται γνώσεις Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Διαδικασιών, Στατιστικής.

Οι βασικότεροι κλάδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι οι εξής:

Γραμμικός Προγραμματισμός
Δυναμικός Προγραμματισμός
Ακέραιος Προγραμματισμός
Μη Γραμμικός Προγραμματισμός
Έλεγχος Αποθεμάτων
Ανανεωτικές Διαδικασίες
Θεωρία Ουρών
Μαρκοβιανά Μοντέλα Αποφάσεων
Θεωρία Παιγνίων
Δικτυωτή Ανάλυση

Εμείς, σ' αυτό το μάθημα, θα ασχοληθούμε με τον γραμμικό προγραμματισμό, το δυναμικό προγραμματισμό και τον ακέραιο προγραμματισμό.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Το γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) είναι το εξής:

αντικειμενική συνάρτηση

Να βρεθεί το: $z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$

όταν

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq, =, \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq, =, \geq b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq, =, \geq b_m$$

και $c_j, b_i, a_{ij}, \ i=1,\dots,m, \ j=1,\dots,n$ πραγματικές σταθερές.

συντελεστές κέρδους (ή κόστους)

Συνήθως υποθέτουμε ότι $x_1,\dots,x_n \geq 0 \rightarrow$ συνθήκη μη αρνητικότητας των συντελεστών

Αν είχαμε min αντί για max μπορούμε να μετατρέψουμε το πρόβλημα με max διότι ισχύει ότι

$$\min f(\underset{\sim}{x}) = -\max(-f(\underset{\sim}{x}))$$

Τα $\underset{\sim}{x} = (x_1,\dots,x_n)$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς αποτελούν την εφικτή περιοχή F.
Αν $\underset{\sim}{x} \in F$ ονομάζεται εφικτή λύση.

Το π.γ.π. μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$Z = \max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$
$$A\underset{\sim}{x} \leq, =, \geq \underset{\sim}{b}$$
$$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$$

όπου,

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Π.χ. (Πρόβλημα Μεγίστου Κέρδους)

Μία Φαρμακευτική Εταιρία παρασκευάζει τριών ειδών φάρμακα Φ_1, Φ_2, Φ_3. Για το καθένα χρησιμοποιούνται τρία υλικά Y_1, Y_2, Y_3 στις παρακάτω αναλογίες:

	Y_1	Y_2	Y_3
Φ_1	0.2	0.4	0.4
Φ_2	0.1	0.5	0.4
Φ_3	0.3	0.2	0.5

Οι διαθέσιμες ποσότητες σε kg των υλικών είναι: για το Y_1 8, για το Y_2 12, για το Y_3 11

Το κέρδος ανά kg για τα Φ_1, Φ_2, Φ_3 είναι: 15, 20, 30, αντίστοιχα.

Να προγραμματιστεί η ημερήσια παραγωγή έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος της Εταιρίας.

Μαθηματική Διατύπωση: Έστω x_j, $j=1,2,3$ παραγόμενη ημερήσια ποσότητα σε kg του Φαρμάκου Φ_j, $j=1,2,3$.

Το συνολικό κέρδος είναι: $15x_1 + 20x_2 + 30x_3$

Οι απαιτούμενες ποσότητες είναι: $0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3$ από το υλικό Y_1

$0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3$ από το υλικό Y_2

$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3$ από το υλικό Y_3

Οπότε έχουμε το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

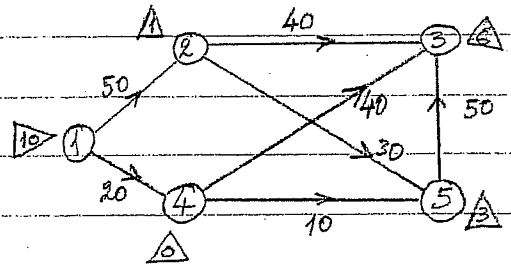
$$\max (15x_1 + 20x_2 + 30x_3)$$
$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 \leq 8$$
$$0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \leq 12$$
$$0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 \leq 11$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Το πρόβλημα μπορεί να γραφεί με μορφή πινάκων ως εξής:

$$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$
$$A\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{b} \quad , \quad \text{όπου} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$$

Π.χ. (πρόβλημα ελαχίστου κόστους)

Μία εταιρία θέλει να στείλει 10 τόνους εμπόρευμα από την πόλη 1 στις πόλεις 2, 3, 4, 5. Η μεταφορά πρέπει να γίνει σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



- στα τρίγωνα αναγράφονται οι τόννοι που πρέπει να πάρει η κάθε πόλη.
- τα βέλη δείχνουν προς ποιά πόλη μπορεί να γίνει η μεταφορά.
- αναγράφονται τα κόστη μεταφοράς ανά τόννο.

Να βρεθεί το σχέδιο μεταφοράς που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Μαθηματική Διατύπωση: Έστω x_{ij} η ποσότητα (σε τόννους) που μεταφέρεται από την πόλη i προς την πόλη j.

Το κόστος μεταφοράς είναι ίσο με: $50x_{12} + 20x_{14} + 40x_{23} + 30x_{25} + 40x_{43} + 10x_{45} + 50x_{53}$

Πρέπει να ισχύει ότι: $x_{12} + x_{14} = 10$

Οπότε έχουμε το εξής π.γ.π.

$$\min(50x_{12} + 20x_{14} + 40x_{23} + 30x_{25} + 40x_{43} + 10x_{45} + 50x_{53})$$
$$x_{12} + x_{14} = 10$$
$$x_{12} - x_{23} - x_{25} = 1$$
$$x_{23} + x_{43} + x_{53} = 6$$
$$x_{14} - x_{43} - x_{45} = 0$$
$$x_{25} + x_{45} - x_{53} = 3$$
$$x_{ij} \geq 0.$$

Π.χ.

Χωριό	Καλλιεργήσιμη Γη (σε Στρέμματα)	Ημερήσια Ποσότητα Νερού (σε m^3)
1	400	6000
2	600	8000
3	300	3750

Κάθε χωριό θα καλλιεργήσει το ίδιο ποσοστό γης.

Είδος καλλιέργειας	Μέγιστη Καλλιεργήσιμη Γη	Απαιτούμενη Ποσότητα Νερού ανά Στρέμμα	Κέρδος ανά Στρέμμα
Τεύτλα (1)	600	30	400
Μπαμπάκι (2)	500	20	300
Σόγια (3)	325	10	100

Πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργηθούν από κάθε χωριό και για κάθε είδος ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος;

Μαθηματική Διατύπωση: Έστω x_{ij} ο αριθμός των στρεμμάτων που καλλιεργεί το χωριό i για το ~~στρέμμα~~ είδος j.

Το π.γ.π είναι το εξής:

$$\max\left[400(x_{11}+x_{21}+x_{31})+300(x_{12}+x_{22}+x_{32})+100(x_{13}+x_{23}+x_{33})\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 400\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 600\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}\leq 300\end{array}\right\}\text{ μέγιστη διαθέσιμη γη ανά χωριό}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 600\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}\leq 500\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}\leq 325\end{array}\right\}\text{ μέγιστη καλλιεργήσιμη γη ανά είδος}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_{11}+2x_{12}+x_{13}\leq 600\\ 3x_{21}+2x_{22}+x_{23}\leq 800\\ 3x_{31}+2x_{32}+x_{33}\leq 375\end{array}\right\}\text{ διαθέσιμη ποσότητα νερού ανά χωριό}$$

$$\frac{x_{11}+x_{12}+x_{13}}{400}=\frac{x_{21}+x_{22}+x_{23}}{600}=\frac{x_{31}+x_{32}+x_{33}}{300}$$ το κάθε χωριό καλλιεργεί το ίδιο ποσοστό γης

$$x_{ij}\geq 0 \quad i=1,2,3,\quad j=1,2,3$$

Γραφική Επίλυση

Όταν στη μαθηματική διατύπωση ενός π.γ.π. υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές τότε υπάρχει γραφική μέθοδος επίλυσης.

π.χ. Εργαστήριο ζαχαροπλαστικής παράγει δύο είδη γλυκών Α και Β.

Απαιτούμενα Υλικά (σε kg ανά πακέτο)

Υλικό	A	B	Διαθέσιμα Υλικά (σε kg ανά ημέρα)
Ζάχαρη	2	1	10
Αλεύρι	3	8	24
Γάλα	0	1	2
Κέρδος σε Ευρώ ανά πακέτο	14	10	

Να βρεθούν οι ποσότητες πακέτων από κάθε είδος γλυκού που πρέπει να παράγονται κάθε μέρα, έτσι ώστε να έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Μαθηματική Διατύπωση: Έστω ότι x_1 πακέτα του A και x_2 του B παράγονται ημερησίως. Τότε το ημερήσιο κέρδος είναι $14x_1 + 10x_2$.

Έχουμε το εξής π.γ.π. :

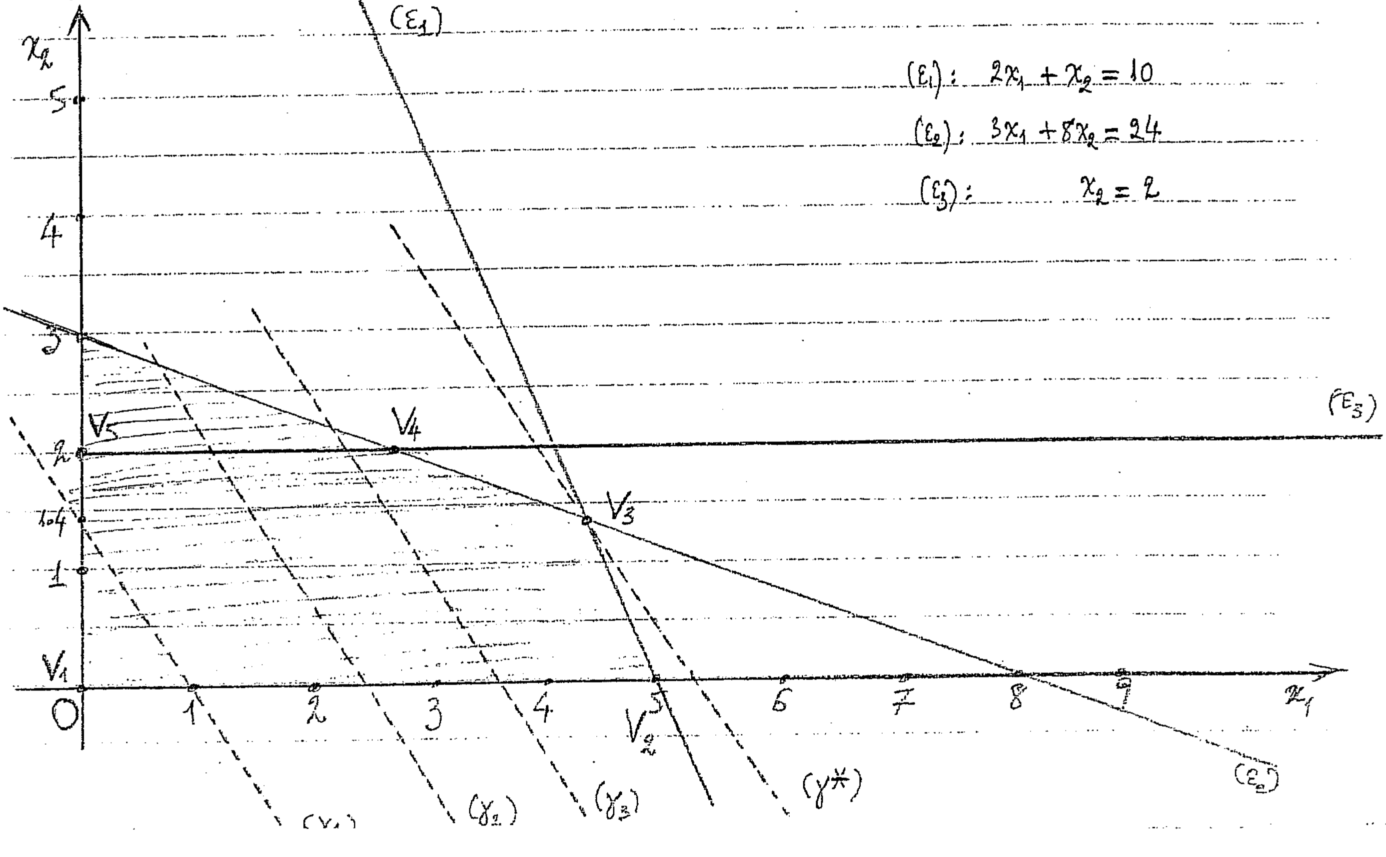
$$\max\,(14x_1 + 10x_2)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 24 \\ x_2 &\leq 2 \end{aligned}\right\}$$

δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερο από 10 kg. ζάχαρη, 24 kg. Αλεύρι, 2 kg. Γάλα ημερησίως.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Γραφική Επίλυση:



Εφικτή Περιοχή F: Μέρος του Επιπέδου στο οποίο επαληθεύονται όλες οι ανισώσεις.

Βλέπουμε ότι η εφικτή περιοχή F είναι το Πεντάγωνο με κορυφές τα σημεία V_1, V_2, V_3, V_4, V_5. Για να βρούμε την άριστη λύση, θεωρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση ισούται με έναν σταθερό αριθμό C, π.χ. C=14, και σχεδιάζουμε την αντίστοιχη ευθεία (γ_1). Αυξάνουμε τις τιμές του C= 28, 42, ... και σχεδιάζουμε τις αντίστοιχες ευθείες $(\gamma_2), (\gamma_3), \ldots$ που είναι παράλληλες πρός την ευθεία (γ_1). Καθώς αυξάνει το C απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων. Μας ενδιαφέρει να βρούμε εκείνη την ευθεία που είναι η πιό μακρινή αλλά έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την εφικτή περιοχή F. Αυτή είναι η ευθεία (γ^*) που έχει ένα κοινό σημείο με την F. Αυτό το σημείο είναι η κορυφή V_3 με συντεταγμένες $\left(x_1 = \frac{56}{13}, x_2 = \frac{18}{13}\right)$. Συνεπώς η άριστη λύση είναι το σημείο $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2)' = \left(\frac{56}{13} \quad \frac{18}{13}\right)'$. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$Z = 14\,\frac{56}{13} + 10\,\frac{18}{13} = 76.154$$

Θα χρησιμοποιηθούν

$$2\,\frac{56}{13} + \frac{18}{13} = 10 \text{ κιλά ζάχαρη}$$

$$3\,\frac{56}{13} + 8\,\frac{18}{13} = 24 \text{ κιλά αλεύρι}$$

$$\frac{18}{13} = 1.38 \text{ κιλά γάλα}$$

Συνεπώς οι δύο πρώτοι περιορισμοί είναι δεσμευτικοί ενώ ο τρίτος είναι χαλαρός.

π.χ. Στο Πανεπιστημιακό εστιατόριο πρέπει να υπάρχουν 3 μονάδες βιταμίνης A και 4 μονάδες βιταμίνης B ανά προσφερόμενη μερίδα. Υπάρχουν δύο τροφές T_1, T_2 που περιέχουν βιταμίνη A και B σύμφωνα με τον πίνακα:

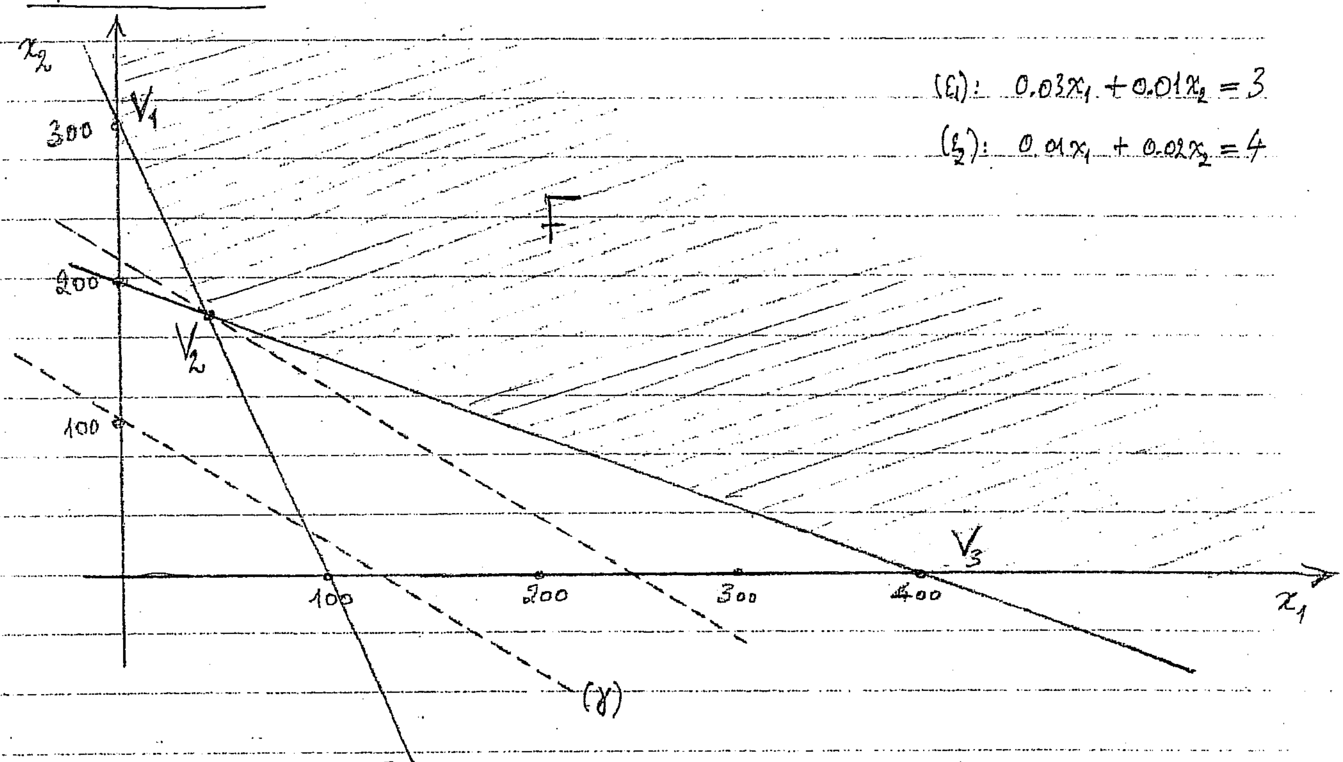
Τροφή	Μονάδες βιταμίνης/gr A	B
T_1	0.03	0.01
T_2	0.01	0.02

Αν η T_1 κοστίζει 0.04 Ευρώ/gr και η T_2 κοστίζει 0.05 ευρώ/gr. Πόση ποσότητα των τροφών T_1, T_2 πρέπει να περιέχει κάθε μερίδα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος;

Μαθηματική Διατύπωση: Έστω ότι η κάθε μερίδα περιέχονται x_i gr. από την τροφή T_i, $i=1,2$.
Έχουμε το εξής π.γ.π.:

$$\min(0.04x_1 + 0.05x_2)$$
$$0.03x_1 + 0.01x_2 \geq 3$$
$$0.01x_1 + 0.02x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Γραφική Επίλυση



Η εφικτή περιοχή F ορίζεται από τις κορυφές $V_1(0,300)$, $V_2(40,180)$, $V_3(400,0)$ και τους θετικούς ημιάξονες.

Θεωρούμε την ευθεία (γ): $0.04x_1 + 0.05x_2 = 5$ και την μετακινούμε παράλληλα. Πρέπει να έχει όσο το δυνατόν μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων και να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το F.

Το κοινό σημείο είναι η κορυφή $V_2(40,180)$. Άρα η άριστη λύση είναι η $\underset{\sim}{x} = (40 \quad 180)'$ και το ελάχιστο κόστος είναι:

$$z = 0.04 \cdot 40 + 0.05 \cdot 180 = 10.6$$

Επομένως πρέπει να χρησιμοποιηθούν 40 gr. της τροφής T_1 και 180 gr. της τροφής T_2.
Κάθε μερίδα κοστίζει 10.6 Ευρώ.

Π.χ. Ένας αγρότης έχει 100 στρέμματα γης και θέλει να καλλιεργήσει σιτάρι και καλαμπόκι. Το ετήσιο κέρδος είναι 1500 ευρώ για κάθε στρέμμα σιτάρι και 1000 ευρώ για κάθε στρέμμα καλαμπόκι. Ο αγρότης έχει εκτιμήσει ότι με μιας ώρας δουλειά τον χρόνο μπορεί να καλλιεργήσει 0.04 στρέμματα σιτάρι ή 0.1 στρέμματα καλαμπόκι και επίσης δεν θέλει να δουλέψει παραπάνω από 2000 ώρες τον χρόνο. Πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργήσει από κάθε είδος για να μεγιστοποιήσει το κέρδος του;

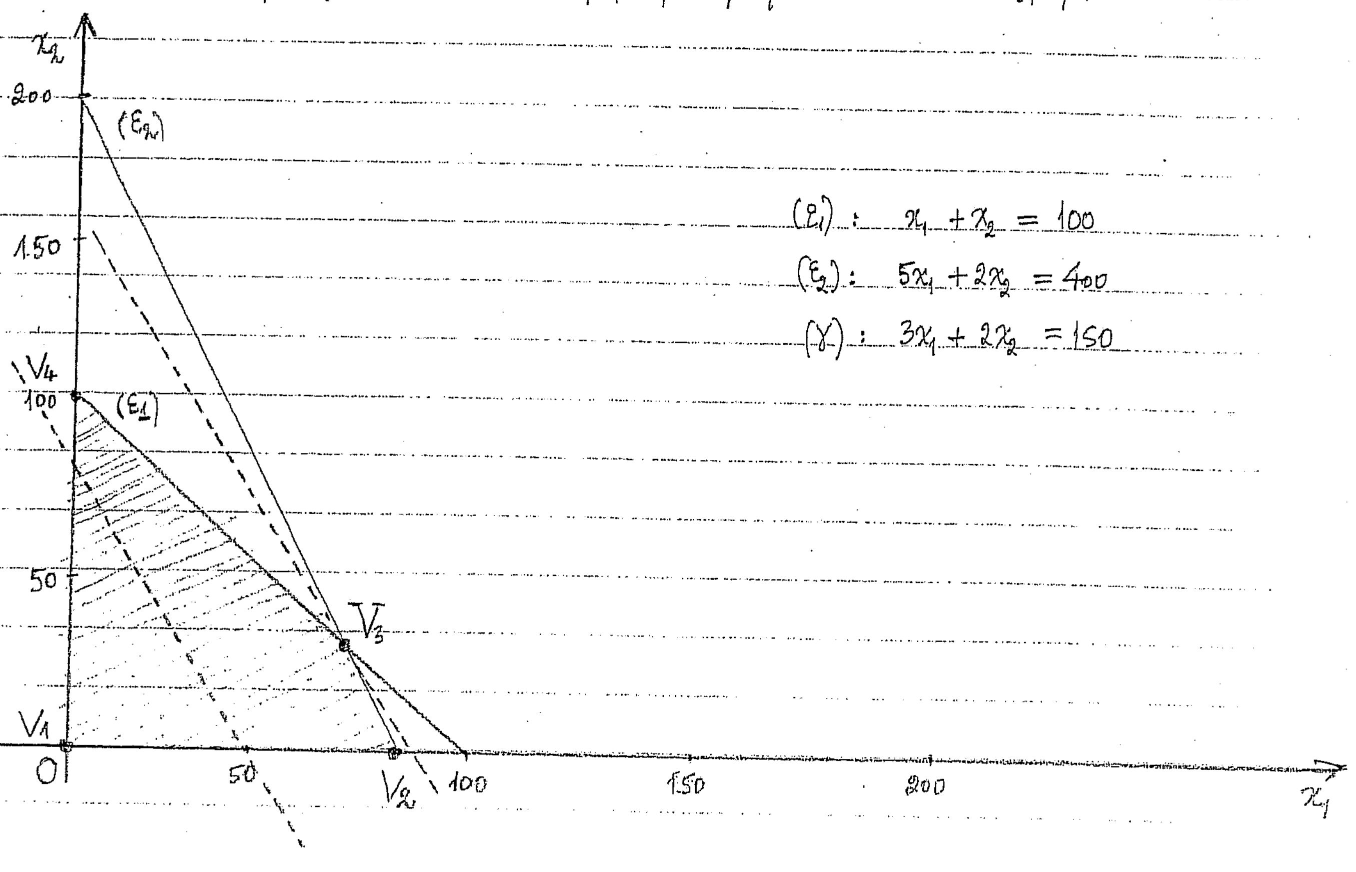
Απάντηση: Έστω ότι ο αγρότης καλλιεργεί x_1 στρέμματα σιτάρι και x_2 στρέμματα καλαμπόκι. Έχουμε το εξής π.γ.π.

$$\max\,(1500x_1 + 1000x_2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$\frac{x_1}{0.04} + \frac{x_2}{0.1} \leq 2000$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ή ισοδύναμα

$$500\max(3x_1 + 2x_2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 100$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 400$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Αφού έχουμε δύο μεταβλητές, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί γραφικά:



Η εφικτή περιοχή F είναι το γραμμοσκιασμένο τετράπλευρο με κορυφές V_1, V_2, V_3, V_4.

Όπως φαίνεται από το σχήμα η βέλτιστη λύση δίνεται από τις συντεταγμένες της κορυφής V_3, που βρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$x_1 + x_2 = 100$$
$$5x_1 + 2x_2 = 400$$

Η λύση του συστήματος είναι $x_1 = 200/3$, $x_2 = 100/3$. Άρα, για να μεγιστοποιήσει ο αγρότης το κέρδος του πρέπει να καλλιεργήσει 200/3 στρέμματα σιτάρι και τα υπόλοιπα 100/3 στρέμματα καλαμπόκι. Το μέγιστο ετήσιο κέρδος του τότε είναι 133.333 Ευρώ.

π.χ. Σε ένα διυλιστήριο δύο τύποι αργού πετρελαίου A και B αναμειγνύονται κατά δύο διαφορετικές διαδικασίες P και Q και παράγουν δύο τύπους βενζίνης X και Y σύμφωνα με τον πίνακα:

Διαδικασία	Είσοδος (αργό πετρέλαιο) A	B	Έξοδος (βενζίνη) X	Y
P	6	4	5	2
Q	3	5	2	4

Οι διαθέσιμες ποσότητες αργού πετρελαίου τύπου A, B είναι 180 και 200 μονάδες αντίστοιχα. Οι απαιτήσεις της αγοράς επιβάλλουν την παραγωγή τουλάχιστον 100 μονάδων βενζίνης από κάθε τύπο. Το κέρδος ανά κύκλο παραγωγής είναι 2 και 3 μονάδες αντίστοιχα για τις διαδικασίες P και Q. Ζητείται ο προσδιορισμός του αριθμού των κύκλων παραγωγής από κάθε διαδικασία που αποφέρει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

i) Να γίνει μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, με μορφή πινάκων.

ii) Να λυθεί γραφικά.

Απάντηση: i) Έστω x_1, x_2 οι κύκλοι παραγωγής κατά τις διαδικασίες P και Q αντίστοιχα. Με βάση τα δεδομένα του πίνακα, τις διαθέσιμες ποσότητες σε αργό πετρέλαιο και τις απαιτήσεις της αγοράς σε βενζίνη, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\max\ (2x_1 + 3x_2)$$
$$6x_1 + 3x_2 \leq 180$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$
$$5x_1 + 2x_2 \geq 100$$
$$2x_1 + 4x_2 \geq 100$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

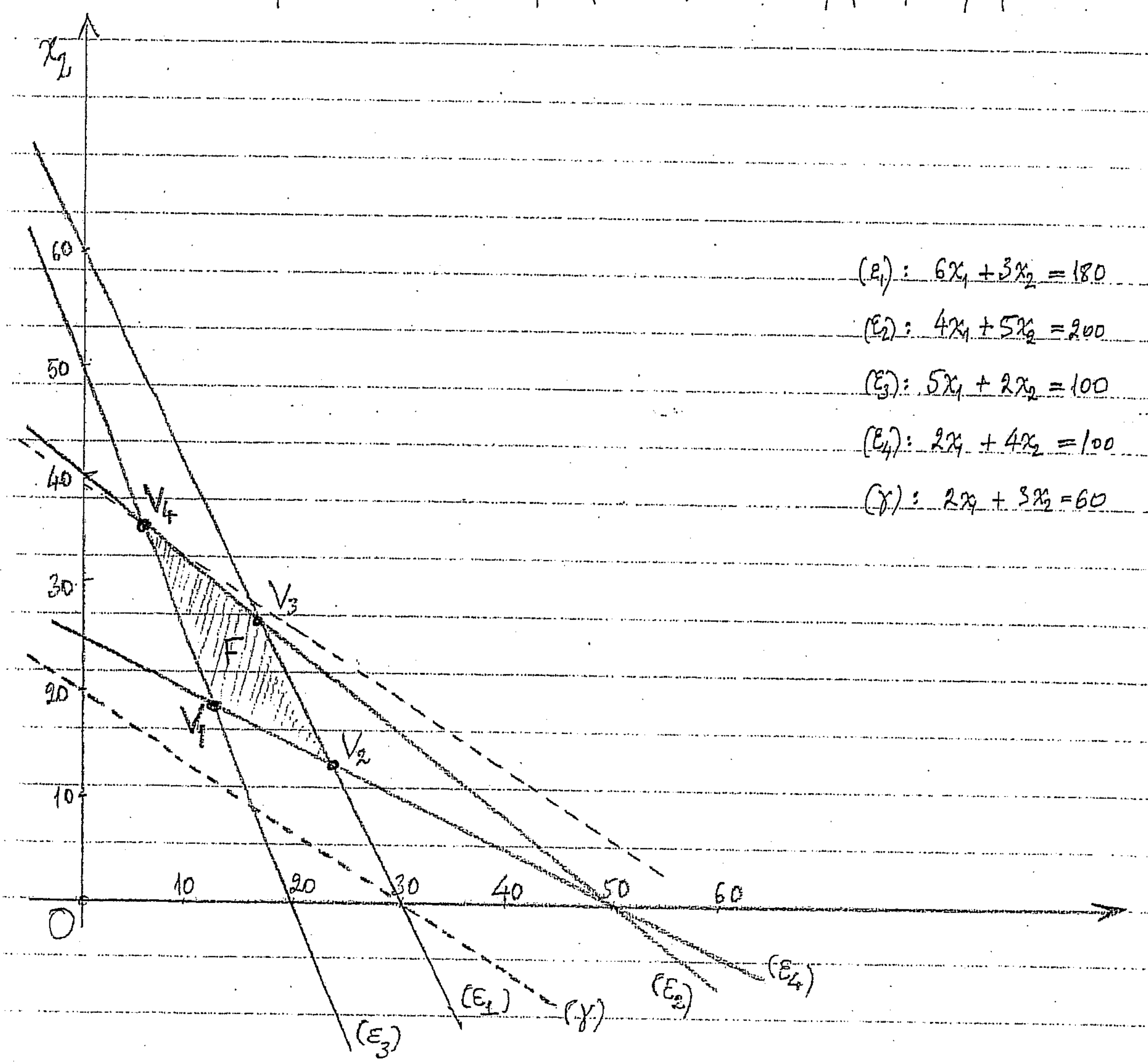
Για να εκφράσουμε το π.γ.π. με μορφή πινάκων, πρέπει όλες οι ανισώσεις να έχουν την ίδια φορά. Έτσι πολλαπλασιάζοντας τα μέλη των δύο τελευταίων ανισώσεων επί (-1) έχουμε το ισοδύναμο π.γ.π.

$$\begin{aligned} &\max(2x_1+3x_2)\\ &6x_1+3x_2 \leq 180\\ &4x_1+5x_2 \leq 200\\ &-5x_1-2x_2 \leq -100\\ &-2x_1-4x_2 \leq -100\\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Με μορφή πινάκων αυτό γράφεται ως
$$\begin{aligned} &\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}\\ &A\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{b}\\ &\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{aligned},$$

όπου $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 180 \\ 200 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \\ -5 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

(ii) Αφού υπάρχουν δύο μόνο μεταβλητές, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί γραφικά.



Η εφικτή περιοχή F είναι το γραμμοσκιασμένο τετράπλευρο με κορυφές V_1, V_2, V_3, V_4. Για να βρούμε την βέλτιστη λύση, θέτουμε την αντικειμενική συνάρτηση ίση με κάποια σταθερά c και κατασκευάζουμε την αντίστοιχη ευθεία (γ). Έστω π.χ. $c = 60$, οπότε (γ): $2x_1+3x_2=60$. Μετακινούμε την (γ) παράλληλα σε όσο το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση από την τομή των αξόνων, προσέχοντας συγχρόνως αυτή να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την F. Στο πρόβλημά μας το κοινό σημείο είναι η κορυφή V_4, της οποίας οι συντεταγμένες είναι την άριστη λύση. ~~Εφόσον η V_4 είναι η τομή των ευθειών (ε_2) και (ε_3), οι συντεταγμένες της~~ βρίσκονται λύνοντας το σύστημα:

$$4x_1 + 5x_2 = 200$$

$$5x_1 + 2x_2 = 100$$

Η λύση του συστήματος είναι $x_1 = 100/17$, $x_2 = 600/17$. Επομένως το μέγιστο κέρδος Z επιτυγχάνεται όταν γίνονται $100/17$ κύκλοι παραγωγής με τη διαδικασία P και $600/17$ κύκλοι παραγωγής με τη διαδικασία Q και είναι:

$$Z = 2\cdot\frac{200}{17} + 3\cdot\frac{600}{17} = 117.65 \text{ χρηματικές μονάδες.}$$

Η παραπάνω βέλτιστη λύση είναι δεκτή μόνον όταν επιτρέπονται και κλασματικοί κύκλοι παραγωγής. Στην αντίθετη περίπτωση, έχουμε ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού, το οποίο δεν είναι δύσκολο να λυθεί. Πράγματι, η εφικτή περιοχή F_A του αντίστοιχου προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού είναι:

$$F_A = \{(\nu,\mu) : \nu,\mu \in \mathbb{N}_0 ,\ (\nu,\mu) \in F\} \subseteq F,$$

δηλαδή είναι το σύνολο των σημείων με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκονται μέσα στην εφικτή περιοχή F του π.γ.π. Έτσι τώρα μετακινούμε την (γ) παράλληλα, σε όσον το δυνατό μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, προσέχοντας την (γ) να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την F_A. Στο πρόβλημά μας το κοινό αυτό σημείο είναι το σημείο $(6,35)$. Επομένως όταν δεν επιτρέπονται κλασματικοί κύκλοι παραγωγής, το μέγιστο κέρδος Z_A επιτυγχάνεται όταν γίνονται 6 κύκλοι παραγωγής με τη διαδικασία P και 35 κύκλοι παραγωγής με την διαδικασία Q και είναι

$$Z_A = 2\cdot 6 + 3\cdot 35 = 117 \text{ χρηματικές μονάδες (που φυσικά είναι μικρότερο του } Z).$$

Άσκηση 1

Μια βιομηχανία παράγει τρία προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3 καθένα από τα οποία απαιτεί τρεις πρώτες ύλες Y_1, Y_2, Y_3 και επεξεργασία σε δύο στάδια Σ_1 και Σ_2. Οι απαιτούμενες ποσότητες πρώτων υλών σε κατάλληλες μονάδες καθώς και ο απαιτούμενος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα

	Y_1	Y_2	Y_3	Σ_1	Σ_2	K
Π_1	3	2	1	12	7	50
Π_2	2	3	5	3	15	70
Π_3	1	4	0	10	10	60
Δ	200	200	150	500	600	

Στην τελευταία γραμμή του πίνακα δίνεται η διαθέσιμη ποσότητα από κάθε πρώτη ύλη καθώς ο διαθέσιμος αριθμός ωρών σε κάθε στάδιο επεξεργασίας για μία ημέρα. Στην τελευταία στήλη δίνεται το κέρδος σε ευρώ ανά μονάδα προϊόντος. Η βιομηχανία θέλει να προγραμματίσει την ημερήσια παραγωγή έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος της. Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αναλυτικά και με μορφή πινάκων.

Άσκηση 2.

Μια βιομηχανία διαθέτει δύο εργοστάσια E_1, E_2 που παράγουν τρία προϊόντα Π_1, Π_2, Π_3. Η ωριαία δυναμικότητα των εργοστασίων, δηλαδή ο αριθμός των μονάδων προϊόντων που παράγουν σε μία ώρα λειτουργίας δίνεται από τον πίνακα:

	Π_1	Π_2	Π_3
E_1	4	2	3
E_2	3	6	5

Το κόστος ωριαίας λειτουργίας για τα E_1, E_2 είναι 20 και 40 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα, ενώ η υπερωριακή λειτουργία τους επιβαρύνει τη βιομηχανία με 30 και 60 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα, για κάθε πρόσθετη ώρα απασχόλησης. Απαιτούνται τουλάχιστον 30, 70 και 60 μονάδες από τα προϊόντα Π_1, Π_2 και Π_3, κάθε μέρα. Αν η διάρκεια κανονικής λειτουργίας των εργοστασίων είναι το πολύ 8 ώρες και η υπερωριακή απασχόληση δεν επιτρέπεται να υπερβεί τις 3 ώρες την ημέρα, πόσες ώρες πρέπει να λειτουργεί κάθε εργοστάσιο ώστε το συνολικό κόστος να ελαχιστοποιείται; Να γίνει η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.

π.χ. Ένας κτηνοτρόφος πρέπει ν' αγοράσει και ν' αναμείξει διαφορετικές τροφές για τους χοίρους του. Πρέπει τουλάχιστον 24% του μείγματος να είναι πρωτεΐνη, τουλάχιστον 12% λίπος και ακριβώς 32% υδατάνθρακες. Επιπλέον το ποσοστό του λίπους δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 0.6 × ποσοστό της πρωτεΐνης. Ο πίνακας δίνει τα ποσοστά των θρεπτικών συστατικών των τεσσάρων τροφών.

Θρεπτικό Συστατικό	Τροφή 1	Τροφή 2	Τροφή 3	Τροφή 4
Πρωτεΐνη	14	52	26	6
Λίπος	5	21	11	16
Υδατάνθρακες	52	10	6	48

Το κόστος (σε Ευρώ ανά τόνο) των τροφών 1,2,3,4 είναι 82, 144, 98, 58, αντίστοιχα. Αν χρειάζονται 5 τόνοι τροφών, πόση ποσότητα κάθε τροφής πρέπει ν' αγοραστεί έτσι ώστε όλοι οι περιορισμοί να ικανοποιούνται με το ελάχιστο κόστος; Γράψτε ένα κατάλληλο π.γ.π.

<u>Απάντηση:</u> Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι αριθμοί των τόννων που αγοράζονται των τροφών 1,2,3,4.

<u>Έχουμε το εξής Π.Γ.Π.:</u>

$$\min(82x_1 + 144x_2 + 98x_3 + 58x_4)$$

<u>υπό τους περιορισμούς:</u>

$$0.14x_1 + 0.52x_2 + 0.26x_3 + 0.06x_4 \geq 1.2 \; (=5\times 0.24) \qquad \text{(πρωτεΐνη)}$$

$$0.05x_1 + 0.21x_2 + 0.11x_3 + 0.16x_4 \geq 0.6 \; (=5\times 0.12) \qquad \text{(λίπος)}$$

$$0.52x_1 + 0.10x_2 + 0.06x_3 + 0.48x_4 = 1.6 \; (=5\times 0.32) \qquad \text{(υδατάνθρακες)}$$

$$0.05x_1 + 0.21x_2 + 0.11x_3 + 0.16x_4 \leq 0.6(0.14x_1 + 0.52x_2 + 0.26x_3 + 0.06x_4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5.$$

<u>Π.χ.</u> Θεωρούμε την εξής επενδυτική ευκαιρία:

Για την επόμενη εβδομάδα (από Δευτέρα μέχρι Παρασκευή) μπορείτε να επενδύσετε ένα ποσό x την $1^η$ μέρα, $2x$ την επόμενη και παίρνετε ένα ποσό $4x$ την $3^η$ μέρα. Δεν υπάρχουν πληρωμές μετά την Παρασκευή. Οπότε δεν ξεκινούν νέες επενδύσεις την Πέμπτη ή την Παρασκευή.

Θεωρούμε την εξής <u>στρατηγική</u>: Έστω ότι ξεκινάτε με 1 χρηματική μονάδα.

Δε	Τρ	Τε	Πε	Πα
1/3	2/3	(4/3)		
		4/9	8/9	$\left(\frac{16}{9}\right)$

(Οι αριθμοί χωρίς παρένθεση παρουσιάζουν τα επενδυόμενα ποσά. Οι αριθμοί με παρένθεση παρουσιάζουν τα ληφθέντα ποσά)

Έτσι έχετε απολαβή 16/9. Μπορείτε να πετύχετε κάτι καλύτερο;

<u>Απάντηση:</u> Μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει μία επένδυση. Κάθε σειρά του πίνακα παρουσιάζει μία νέα επένδυση. Οι αριθμοί χωρίς παρένθεση παρουσιάζουν τα επενδυόμενα ποσά. Οι αριθμοί με παρένθεση παρουσιάζουν τα ληφθέντα ποσά.

Δε	Τρ	Τε	Πε	Πα
1/4	1/2	(1)		
	1/4	1/2	(1)	
		1/2	1	(2)

Συνεπώς είναι δυνατόν να έχουμε απολαβή 2 την Παρασκευή. Μπορούμε να πετύχουμε ακόμα κάτι καλύτερο;

Έστω $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ το ποσό που επενδύουμε την i-οστή μέρα. Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει την ροή της επένδυσης.

	Δε	Τρ.	Τε	Πε	Πα
	x_1	$2x_1$	$(4x_1)$		
		x_2	$2x_2$	$(4x_2)$	
			x_3	$2x_3$	$(4x_3)$
Υπόλοιπα	$1-x_1$	$1-3x_1-x_2$	$1+x_1-3x_2-x_3$	$1+x_1+x_2-3x_3$	$1+x_1+x_2+x_3$

Μια τέτοια επενδυτική στρατηγική είναι δυνατή αν τα υπόλοιπα στο τέλος της ημέρας είναι μη αρνητικά. Οπότε, το πρόβλημα είναι να επιλέξουμε x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε

$$\max(1+x_1+x_2+x_3)$$

με τους εξής περιορισμούς:

$$1-x_1 \geq 0$$
$$1-3x_1-x_2 \geq 0$$
$$1+x_1-3x_2-x_3 \geq 0$$
$$1+x_1+x_2-3x_3 \geq 0$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

← Αυτό είναι ένα Π.γ.π.

Π.χ. Μια εταιρία έχει τρία εργοστάσια E_1, E_2, E_3.

Το E_1 φτιάχνει αλουμινένια πλαίσια

Το E_2 φτιάχνει ξύλινα πλαίσια

Το E_3 φτιάχνει τζάμια

Η Εταιρία προτίθεται να φτιάξει δύο νέα προϊόντα:

Προϊόν 1: Γυάλινη Πόρτα σε αλουμινένιο πλαίσιο

Προϊόν 2: Ξύλινο Παράθυρο

Το Προϊόν 1 θα παραχθεί από τα εργοστάσια E_1 και E_2.

Το Προϊόν 2 θα παραχθεί από τα εργοστάσια E_2 και E_3.

Η παραγωγή και των δύο προϊόντων μπορεί να γίνει κατά παρτίδες των 20 κάθε εβδομάδα.

Δεδομένα: Απαιτούμενος Χρόνος (σε ώρες) για την Παραγωγή μιας παρτίδας

	Προϊόν		
Εργοστάσιο	1	2	Διαθέσιμος χρόνος την Εβδομάδα (σε ώρες)
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Κέρδος ανά παρτίδα	3000 €	5000 €	

Πόσες παρτίδες των προϊόντων 1 και 2 πρέπει να παραχθούν έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Απάντηση: Έστω x_i, $i=1,2$ ο αριθμός των παρτίδων του προϊόντος i που θα παραχθούν και

Z = συνολικό εβδομαδιαίο κέρδος (σε χιλιάδες Ευρώ) από την παραγωγή των δύο προϊόντων.

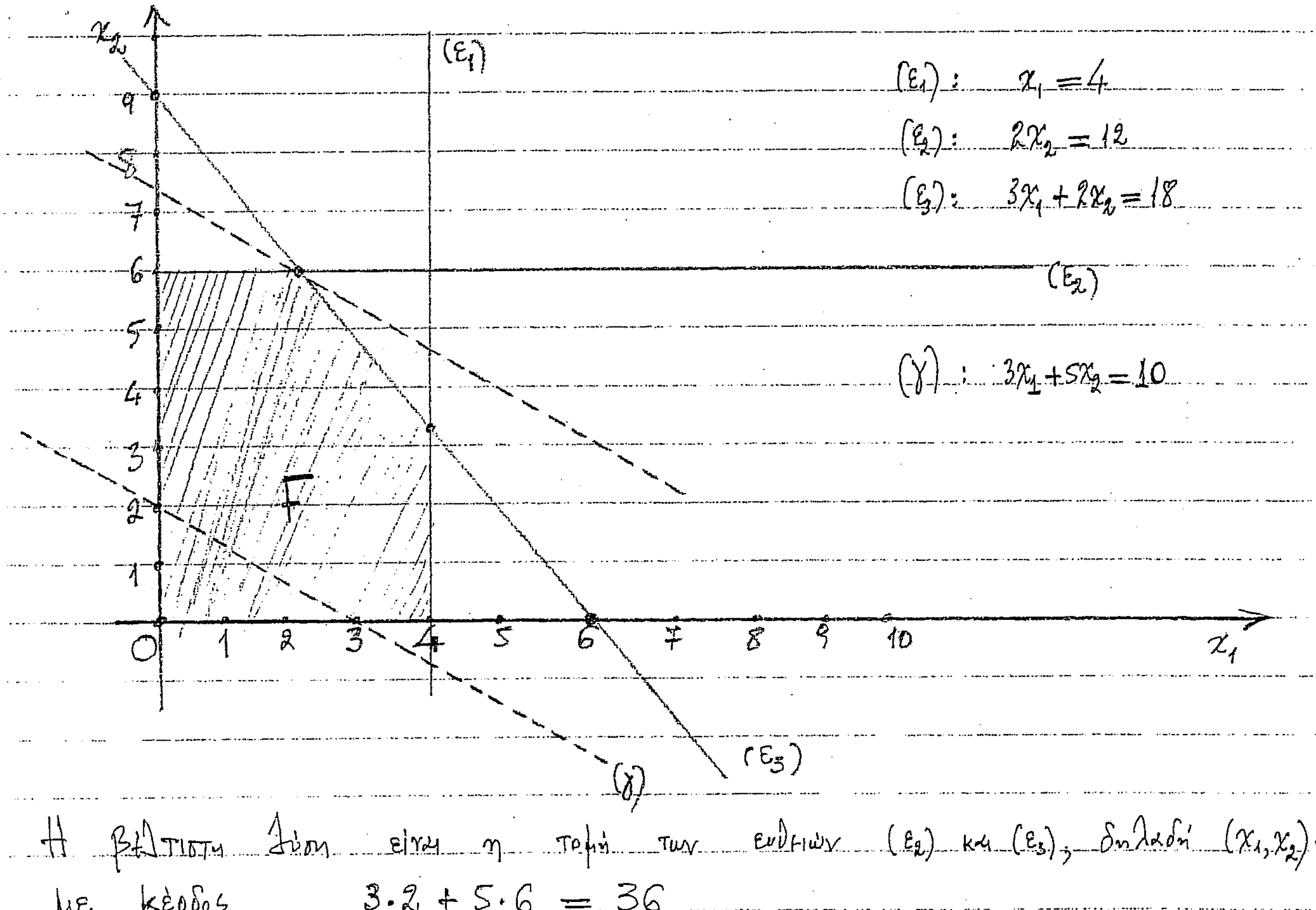
Το π.γ.π. είναι το εξής:

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Γραφική Επίλυση



Η βέλτιστη λύση είναι η τομή των ευθειών (ε_2) και (ε_3), δηλαδή $(x_1, x_2) = (2,6)$ με κέρδος $3\cdot 2 + 5\cdot 6 = 36$.

Κανονική Μορφή

<u>Ορισμός</u>: Ένα π.γ.π. είναι σε κανονική (ή τυπική) μορφή αν έχει την εξής μορφή:

$$\pm \max(c_1x_1+\cdots+c_nx_n)$$
$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n &= b_2\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m\\ x_1,\dots,x_n &\geq 0\end{aligned}$$

, όπου c_j, b_i, a_{ij} $(i=1,\dots,m, j=1,\dots,n)$ πραγματικές σταθερές και $b_i \geq 0$, $i=1,\dots,m$.

Ισοδύναμα, με μορφή πινάκων,

$$\pm \max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$
$$A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b} \qquad \text{, όπου } \underset{\sim}{b}\geq \underset{\sim}{0}$$
$$\underset{\sim}{x}\geq \underset{\sim}{0}$$

Κάθε π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς:

(i) Αν έχουμε $\min f(\underset{\sim}{x})$ τότε θέτουμε $g(\underset{\sim}{x})=-f(\underset{\sim}{x})$ και βρίσκουμε το $g(\underset{\sim}{x})$ και το ελάχιστο της $f(\underset{\sim}{x})$ βρίσκεται από τη σχέση $\min f(\underset{\sim}{x}) = -\max g(\underset{\sim}{x})$.

(ii) Αν υπάρχουν αρνητικοί σταθεροί όροι σε περιορισμούς, αυτοί μετατρέπονται σε θετικούς πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των αντίστοιχων περιορισμών επί (-1).

(iii) Οι περιορισμοί που εκφράζονται από ανισώσεις μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη αρνητικών μεταβλητών, που λέγονται περιθώριες μεταβλητές. Πράγματι οι περιορισμοί

$$\begin{Bmatrix} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \leq b_i,\\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n \geq b_j\end{Bmatrix}$$

είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς

$$\begin{Bmatrix} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n + x_r = b_i,\\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n - x_s = b_j\end{Bmatrix}, \text{ όπου } x_r\geq 0,\ x_s\geq 0.$$

(iv) Αν η μεταβλητή x_i δεν υπόκειται στον περιορισμό $x_i\geq 0$, αλλά είναι $x_i\in\mathbb{R}$, θέτουμε $x_i = x_i' - x_i''$, όπου $x_i', x_i'' \geq 0$. Αυτό γίνεται διότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x=\max(0,x)-\max(0,-x)$.

Αν η μεταβλητή x_j είναι μη θετική, θέτουμε $x_j=-x_j'$, όπου $x_j'\geq 0$.

<u>Π.χ.</u> Να τεθεί σε κανονική μορφή το π.γ.π.

$$\min(x_1+2x_2+x_3')$$
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad &\leq 40\\ x_1-x_2+x_3 &= 30\\ x_1-3x_2-2x_3 &\geq -50\\ x_2+x_3 &\geq 25\\ x_1,x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

<u>Απάντηση</u>: Πολλαπλασιάζουμε τον τρίτο περιορισμό επί (-1). Στα πρώτα μέλη των δύο ανισώσεων της μορφής $\leq$ προσθέτουμε τις περιθώριες μεταβλητές x_4, x_5, αντίστοιχα, ενώ από το πρώτο μέλος της τελευταίας ανίσωσης αφαιρούμε την περιθώρια μεταβλητή x_6, όπου $x_4,x_5,x_6\geq 0$. Θέτουμε επίσης $x_3=x_3'-x_3''$ με την υπόθεση $x_3', x_3''\geq 0$. Τέλος μετατρέπουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης σε πρόβλημα μεγιστοποίησης αλλάζοντας τα πρόσημα των συντελεστών στην αντικειμενική συνάρτηση. Έτσι καταλήγουμε στην εξής κανονική μορφή του προβλήματος:

$$-\max(-x_1-2x_2-x_3'+x_3'')$$
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \qquad\qquad +x_4 &= 40\\ x_1-x_2+x_3'-x_3'' &= 30\\ -x_1+3x_2+2x_3'-2x_3'' \quad +x_5 &= 50\\ x_2+x_3'-x_3'' \quad -x_6 &= 25\\ x_1,x_2,x_3',x_3'',x_4,x_5,x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Άσκηση 3 Να γραφούν τα παρακάτω π.γ.π. στην κανονική τους μορφή:

(i) $\min(x_1-x_2+3x_3)$
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &\leq 1\\ x_2+x_3 &\geq 2\\ x_2,x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii) $\max(3x_1-4x_2+x_3)$
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\leq 20\\ 2x_1+3x_2-5x_3 &\geq 40\\ 2x_1-6x_2 &= 25\\ |3x_1-x_2+2x_3| &\leq 60\\ x_1,x_2\geq 0,\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Ορισμός: Έστω πίνακας A με m γραμμές και n στήλες. Ο βαθμός του πίνακα A (Συμβολισμός: $r(A)$) είναι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του.

Αποδεικνύεται ότι ο μέγιστος αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ενός πίνακα είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό των γραμμικών ανεξάρτητων στηλών του. Ισχύει δηλαδή ότι: $r(A)=r(A')=\min(m,n)$.

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $r(A)=m<n$.

Ερώτηση: Έχει ένα συγκεκριμένο π.γ.π. άριστη λύση ή όχι;

Θεώρημα 1 (Weierstass): $F\neq\emptyset$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f:F\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $\underset{\sim}{x}^*\in F$: $f(\underset{\sim}{x}^*)\geq f(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x}\in F$, δηλαδή η F πετυχαίνει το μέγιστό της σε σημείο του F.

Πόρισμα: Έστω το π.γ.π. $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{x}\geq\underset{\sim}{0}$ με εφικτή περιοχή $F\neq\emptyset$. Αν το F είναι φραγμένο σύνολο, τότε το π.γ.π έχει άριστη λύση.

Απόδειξη: Η αντικειμενική συνάρτηση $f(\underset{\sim}{x})=\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, ως γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^n$. Επίσης η εφικτή περιοχή F είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή περιέχει τα οριακά της σημεία. Πράγματι: Έστω $\underset{\sim}{x}_n\in F$, $n=1,2,\dots$ ακολουθία σημείων του F, με $\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{x}$. Αφού $\underset{\sim}{x}_n\in F$, $n=1,2,\dots$, έχουμε:

(i) $\underset{\sim}{x}_n\geq\underset{\sim}{0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{x}_n\geq\underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{x}\geq\underset{\sim}{0}$.

(ii) $A\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{b} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}A\underset{\sim}{x}_n=\underset{\sim}{b} \Rightarrow A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$

Από (i) και (ii) συνεπάγεται ότι $\underset{\sim}{x}\in F$, δηλαδή το F είναι κλειστό. Αφού το F είναι επίσης φραγμένο, συμπεραίνουμε ότι είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα του Weierstrass προκύπτει ότι υπάρχει $\underset{\sim}{x}^*\in F$ τέτοιο ώστε $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}^*\geq\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{x}\in F$, δηλαδή το π.γ.π. έχει άριστη λύση.

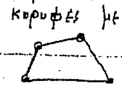
Θεώρημα 2. Έστω το π.γ.π. σε κανονική μορφή:

$$\max c'x \qquad\qquad \max(c_1x_1+\dots+c_nx_n)$$
$$Ax=b \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad P_1x_1+\dots+P_nx_n=b, \quad \text{όπου}$$
$$x\geq 0 \qquad\qquad x_1,\dots,x_n\geq 0$$

P_j, $j=1,2,\dots,n$ η j-οστή στήλη του A, δηλαδή $A=(P_1,\dots,P_n)$ και $r(A)=m<n$

(i) Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο.

(ii) Αν η F είναι φραγμένο σύνολο, τότε είναι κυρτό πολύεδρο (δηλαδή σχηματικά είναι ένα σύνολο με κορυφές με την εξής μορφή



)

Θεώρημα 3 Αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, τότε η άριστη λύση επιτυγχάνεται σε μία κορυφή (ακρότατο σημείο) της F.

Συνεπώς πρέπει να βρούμε τις κορυφές της (φραγμένης) εφικτής περιοχής F. Παραθέτουμε μερικούς ορισμούς:

i) **Λύση** του π.γ.π. λέγεται κάθε λύση $x=(x_1,\dots,x_n)'$ του συστήματος $Ax=b$

ii) **Βασική Λύση** είναι κάθε x που οι μη μηδενικές συντεταγμένες της αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Αφού $r(A)=m$, κάθε βασική λύση έχει το πολύ m μη μηδενικές συντεταγμένες.

iii) **Βασική Εφικτή Λύση** λέγεται κάθε λύση που είναι συγχρόνως βασική και εφικτή (δηλαδή έχει μη αρνητικές συντεταγμένες)

iv) **Μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση** λέγεται κάθε βασική εφικτή λύση που έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες. Διαφορετικά λέγεται εκφυλισμένη.

Εύρεση μιας βασικής λύσης του π.γ.π.

Διαλέγουμε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A, έστω τις

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}, \quad (1\leq i_1<i_2<\dots<i_m\leq n)$$

και λύνουμε το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων:

$$P_{i_1}x_{i_1}+P_{i_2}x_{i_2}+\dots+P_{i_m}x_{i_m}=b$$

Αν $x_{i_1 0}, x_{i_2 0}, \dots, x_{i_m 0}$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος τότε η

$$x_0=(0,\dots,0,x_{i_1 0},0,\dots,0,x_{i_2 0},0,\dots,0,x_{i_m 0},0,\dots,0)$$ είναι βασική.

Θεώρημα 4. Αν η x είναι βασική εφικτή λύση του π.γ.π. τότε η x είναι κορυφή της F

Θεώρημα 5. Αν η x είναι κορυφή της F, τότε η x είναι βασική εφικτή λύση του π.γ.π.

Με βάση τα Θεωρήματα 3, 4, 5 είναι φανερό ότι μπορούμε να λύσουμε αλγεβρικά κάθε π.γ.π. του οποίου η εφικτή περιοχή είναι φραγμένο σύνολο.

<u>Παράδειγμα:</u> Να λυθεί το π.γ.π.

$$\begin{array}{l} \max(3x_1+5x_2-2x_3+x_4) \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad = 1 \\ x_i \geq 0,\ i=1,2,3,4 \end{array} \iff \begin{array}{l} \max(3x_1+5x_2-2x_3+x_4) \\ \underset{\sim}{P}_1 x_1 + \underset{\sim}{P}_2 x_2 + \underset{\sim}{P}_3 x_3 + \underset{\sim}{P}_4 x_4 = \underset{\sim}{b} \\ x_i \geq 0,\ i=1,2,3,4 \end{array}$$

όπου: $\underset{\sim}{P}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{P}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{P}_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{P}_4=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

<u>Λύση:</u> Κατ' αρχάς εξετάζουμε αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο. Από τον δεύτερο περιορισμό προκύπτει ότι: $0 \leq x_1 \leq 1/2$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 1/2$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη τους περιορισμούς προκύπτει ότι $0 \leq x_4 \leq 6$. Συνεπώς το σύνολο F είναι φραγμένο. Πρέπει τώρα να βρούμε τις κορυφές του F, δηλαδή τις βασικές εφικτές λύσεις. Παίρνουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από τις στήλες $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_3, \underset{\sim}{P}_4$.

i) Οι $\underset{\sim}{P}_1$ και $\underset{\sim}{P}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\} \iff x_1 = 2,\ x_2 = -3 < 0 \quad \text{απορρίπτεται ως μη εφικτή.}$$

ii) Οι στήλες $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένες

iii) Οι $\underset{\sim}{P}_1, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 = 5 \\ 2x_1 \qquad = 1 \end{array}\right\} \iff x_1 = 1/2,\ x_4 = 9/2 \quad \text{δεκτή}$$

iv) Οι $\underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} -x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{array}\right\} \iff \begin{array}{l} x_2 = -3 < 0 \\ x_3 = 2 \end{array} \quad \text{απορρίπτεται ως μη εφικτή}$$

v) Οι $\underset{\sim}{P}_2, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} -x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 \qquad = 1 \end{array}\right\} \iff x_2 = 1,\ x_4 = 6 \quad \text{δεκτή}$$

vi) Οι $\underset{\sim}{P}_3, \underset{\sim}{P}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$\left.\begin{array}{l} x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_3 \qquad = 1 \end{array}\right\} \iff x_3 = 1/2,\ x_4 = 9/2 \quad \text{δεκτή}$$

Συνεπώς υπάρχουν τρεις βασικές εφικτές λύσεις (κορυφές της F) και μάλιστα μη εκφυλισμένες. Αυτές είναι οι $\underset{\sim}{x}_1 = (1/2, 0, 0, 9/2)'$, $\underset{\sim}{x}_2 = (0, 1, 0, 6)'$, $\underset{\sim}{x}_3 = (0, 0, 1/2, 9/2)'$. Βάσει του Θεωρήματος 3 μία (τουλάχιστον) από αυτές είναι άριστη λύση. Οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συναρτήσεως είναι

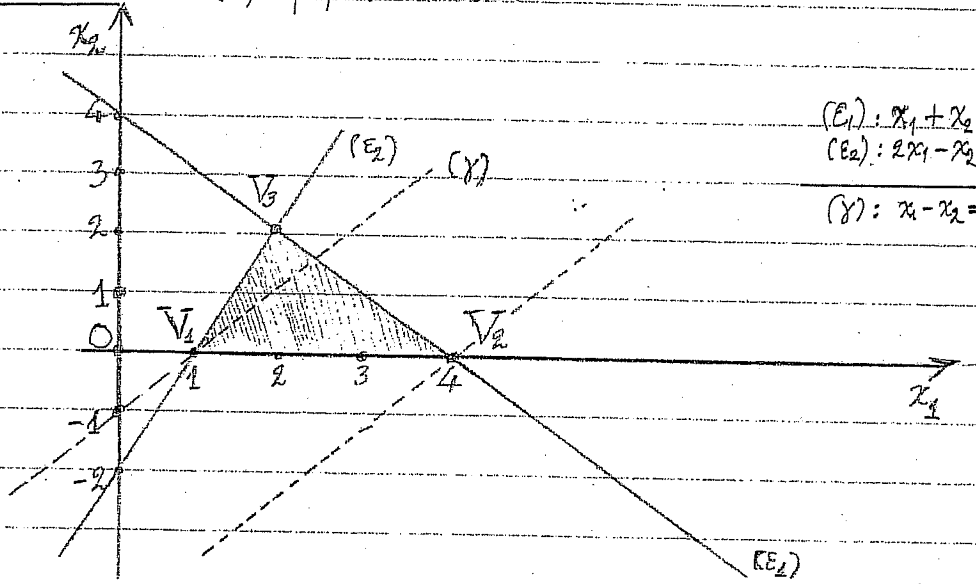
$$3\cdot(1/2) + 9/2 = 6, \quad 5\cdot 1 + 6 = 11, \quad -2\cdot(1/2) + 9/2 = 3.5$$

Συνεπώς η άριστη λύση είναι η $\underset{\sim}{x}_2$.

Π.χ. Δίνεται το π.γ.π.
$$\max(x_1-x_2)$$
$$x_1+x_2\leq 4$$
$$2x_1-x_2\geq 2$$
$$x_1,x_2\geq 0$$

(i) Να λυθεί γραφικά (ii) Να γραφεί στην κανονική του μορφή και να βρεθούν οι κορυφές του.

Απάντηση: (i) Γραφική Επίλυση:



$(\varepsilon_1): x_1+x_2=4$
$(\varepsilon_2): 2x_1-x_2=2$
$(\gamma): x_1-x_2=1$

Η βέλτιστη λύση είναι $x_1=4,\ x_2=0$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z=4$

(ii) Η κανονική μορφή του π.γ.π είναι

$$\left.\begin{aligned}&\max(x_1-x_2)\\&x_1+x_2+x_3=4\\&2x_1-x_2-x_4=2\\&x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned}&\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}\\&A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}\\&\underset{\sim}{x}\geq\underset{\sim}{0}\end{aligned}\quad \text{με}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&-1&0&-1\end{pmatrix}\quad r(A)=2$$

Όλες οι στήλες του A, ανά δύο, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Λύνουμε $\binom{4}{2}$ συστήματα, τα οποία είναι

1) $\begin{aligned}x_1+x_2&=4\\2x_1-x_2&=2\end{aligned}$ 2) $\begin{aligned}x_1+x_3&=4\\2x_1&=2\end{aligned}$ 3) $\begin{aligned}x_1&=4\\2x_1-x_4&=2\end{aligned}$ 4) $\begin{aligned}x_2+x_3&=4\\-x_2&=2\end{aligned}$ 5) $\begin{aligned}x_2&=4\\-x_2-x_4&=2\end{aligned}$ 6) $\begin{aligned}x_3&=4\\-x_4&=2\end{aligned}$

Οι βασικές λύσεις του π.γ.π είναι:

$\underset{\sim}{x}_1=(2,2,0,0)'$, $\underset{\sim}{x}_2=(1,0,3,0)'$, $\underset{\sim}{x}_3=(4,0,0,6)'$, $\underset{\sim}{x}_4=(0,-2,6,0)'$, $\underset{\sim}{x}_5=(0,4,0,-6)'$,
$\underset{\sim}{x}_6=(0,0,4,-2)'$

Από αυτές μόνον οι τρεις πρώτες έχουν όλα τα στοιχεία του μη αρνητικά, δηλαδή είναι εφικτές λύσεις. Άρα οι ζητούμενες κορυφές της εφικτής περιοχής είναι

$$\underset{\sim}{x}_1=(2,2,0,0)'$$
$$\underset{\sim}{x}_2=(1,0,3,0)'$$
$$\underset{\sim}{x}_3=(4,0,0,6)'$$

Η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την μέγιστη τιμή της $z=4$ στην $\underset{\sim}{x}_3$ που επομένως είναι η άριστη λύση.

Μέθοδος Simplex

Σύμφωνα με τη μέθοδο Simplex από μία κορυφή $\underset{\sim}{x}_1$ πηγαίνουμε σε μία καλύτερη $\underset{\sim}{x}_2$, δηλαδή $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}_2 > \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}_1$ κ.ο.κ. Μετά από ένα πεπερασμένο πλήθος βημάτων φθάνουμε στην άριστη λύση του προβλήματος.

Γιά την εφαρμογή της μεθόδου Simplex, πρέπει:

(i) Το π.γ.π. να είναι σε κανονική μορφή.

(ii) Να είναι γνωστή μιά (αρχική) μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_0$.

Έστω $\underset{\sim}{x}_0$: μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση με ακριβώς m θετικές συντεταγμένες. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρούμε ότι:

$$\underset{\sim}{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}, 0, 0, \dots, 0)' \quad \text{με } x_{i0} > 0 \quad i=1,\dots,m$$

$$\underset{\sim}{x}_0 \text{ λύση του π.γ.π.} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i0}\underset{\sim}{P}_i = \underset{\sim}{b}$$

Έστω $z_0 = \sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_i$ (τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο σημείο $\underset{\sim}{x}_0$)

Αφού οι στήλες $\underset{\sim}{P}_1, \dots, \underset{\sim}{P}_m$ αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$, κάθε στήλη του πίνακα A μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\underset{\sim}{P}_1, \dots, \underset{\sim}{P}_m$, δηλαδή υπάρχουν $x_{ij} \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\underset{\sim}{P}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\underset{\sim}{P}_i \quad , j=1,\dots,n$$

Γιά $j=1,\dots,m$ ισχύει ότι $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i\neq j \end{cases}$.

Έστω $z_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$, $j=1,\dots,n$. Προφανώς ισχύει ότι $z_j = c_j$, $j=1,\dots,m$.

Ο Αλγόριθμος Simplex βασίζεται στα παρακάτω 3 θεωρήματα:

Θεώρημα 6: Αν $z_j - c_j \geq 0$, γιά κάθε $j=1,\dots,n$ τότε η μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι άριστη.

Θεώρημα 7: Αν $z_j - c_j < 0$ γιά ένα τουλάχιστον $j \in \{1,\dots,n\}$ και $x_{ij} \leq 0$ για κάθε $i=1,\dots,m$ τότε το π.γ.π. δεν είναι φραγμένο, δηλαδή $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} = +\infty$.

Θεώρημα 8: Αν $z_j - c_j < 0$ γιά ένα τουλάχιστον $j \in \{1,\dots,n\}$ και $x_{ij} > 0$ γιά ένα τουλάχιστον $i \in \{1,\dots,m\}$, τότε υπάρχει βασική εφικτή λύση $\underset{\sim}{x}_1$, καλύτερη από την $\underset{\sim}{x}_0$.

Αν $\min\limits_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\} \overset{\text{έστω}}{=\!=} \frac{x_{10}}{x_{1j}} = \theta_0$, η $\underset{\sim}{x}_1$ είναι

$$\underset{\sim}{x}_1 = (0, x_{20} - \theta_0 x_{2j}, \dots, x_{m0} - \theta_0 x_{mj}, 0, \dots, 0, \underset{j\text{-θέση}}{\theta_0}, 0, \dots, 0)'$$

Σημείωση: Αν η $\underset{\sim}{x}_0$ είναι εκφυλισμένη βασική λύση τη μετατρέπουμε σε μη εκφυλισμένη αντικαθιστώντας το 0 της βασικής μεταβλητής με αυθαίρετο μικρό $\varepsilon > 0$ και συνεχίζουμε κανονικά μέχρι να βρούμε την άριστη λύση, οπότε θέτουμε πάλι $\varepsilon = 0$.

Ο αλγόριθμος Simplex δημιουργεί μία ακολουθία βελτιωμένων βασικών λύσεων μέχρι να φθάσει στην άριστη λύση.

Τα διαδοχικά βήματα της Simplex εκτελούνται πιο εύκολα με τη βοήθεια μιας σειράς πινάκων που είναι γνωστοί ως tableaux Simplex.

Θα κάνουμε την υπόθεση ότι ο πίνακας A περιέχει τον $m\times m$ μοναδιαίο πίνακα I, ο οποίος δίνει την πρώτη βάση. Τότε η αρχική βασική εφικτή λύση δίνεται από το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ των σταθερών όρων. Αν τα στοιχεία του $\underset{\sim}{b}$ είναι γνήσια θετικά, η λύση είναι μη εκφυλισμένη και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο Simplex. Διαφορετικά αντικαθιστούμε τα 0 του $\underset{\sim}{b}$ με $\varepsilon > 0$ (αυθαίρετα μικρό) και συνεχίζουμε μέχρι να βρούμε την άριστη λύση, οπότε θέτουμε $\varepsilon = 0$.

Αλγόριθμος: Έστω ότι ο μοναδιαίος $m\times m$ πίνακας σχηματίζεται από τις m πρώτες στήλες του A.

Βήμα 1. Σχηματίζουμε έναν $(m+1)\times(n+4)$ πίνακα (tableau):

			c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	c_{m+2}	$\dots$	c_n	
B	$\underset{\sim}{c}_B$	b	$\underset{\sim}{P}_1$	$\underset{\sim}{P}_2$	$\dots$	$\underset{\sim}{P}_m$	$\underset{\sim}{P}_{m+1}$	$\underset{\sim}{P}_{m+2}$	$\dots$	$\underset{\sim}{P}_n$	θ
$\underset{\sim}{P}_1$	c_1	x_{10}	1	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$x_{1,m+2}$	$\dots$	x_{1n}	
$\underset{\sim}{P}_2$	c_2	x_{20}	0	1	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$x_{2,m+2}$	$\dots$	x_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\underset{\sim}{P}_m$	c_m	x_{m0}	0	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$x_{m,m+2}$	$\dots$	x_{mn}	
		Z_0	$0 = z_1 - c_1$	$0 = z_2 - c_2$	$\dots$	$0 = z_m - c_m$	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$z_{m+2} - c_{m+2}$	$\dots$	$z_n - c_n$	

τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

Σημείωση: Η τιμή z_k, $k=0,\dots,n$ είναι το εσωτερικό γινόμενο της δεύτερης και της $(3+k)$-οστής στήλης.

Βήμα 2. Ελέγχουμε αν η λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές $z_k - c_k$:

2α) Αν $z_k - c_k \geq 0$ γιά όλα τα $k=1,\dots,n$, τότε η λύση $\underset{\sim}{x}_0$ είναι άριστη.

2β) Αν $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} \leq 0$ $i=1,\dots,m$ για κάποιο j, τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.

2γ) Αν οι 2α), 2β) δεν ισχύουν, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον j: $z_j - c_j < 0$ και $x_{ij} \geq 0$ για ένα τουλάχιστον i (και αυτό για κάθε τέτοιο j). Πάμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3. Η στήλη $\underset{\sim}{P}_j$ που γίνεται βασική ορίζεται από τη σχέση:

$$\underset{\sim}{P}_j : |z_j - c_j| = \max_k \{|z_k - c_k| : z_k - c_k < 0\}$$

Βήμα 4. Στην τελευταία στήλη γράφουμε τους λόγους x_{s0}/x_{sj} γιά $x_{sj} \geq 0$, δηλαδή τους λόγους των στοιχείων της στήλης b με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της στήλης $\underset{\sim}{P}_j$. Η στήλη $\underset{\sim}{P}_i$ που φεύγει από τη βάση, ορίζεται από τη σχέση

$$\underset{\sim}{P}_i : \frac{x_{i0}}{x_{ij}} = \min_{1\leq s\leq m} \left\{ \frac{x_{s0}}{x_{sj}} : x_{sj} > 0 \right\}$$

Βήμα 5. Το στοιχείο x_{ij} το σημειώνουμε με τετράγωνο και ονομάζεται πιλότος. Τα στοιχεία x'_{sk} του επόμενου tableau ορίζονται από τις σχέσεις:

$$x'_{ik} = \frac{x_{ik}}{x_{ij}} \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

$$x'_{sk} = x_{sk} - \frac{x_{ik}}{x_{ij}} x_{sj} \quad s = 1, \dots, m, m+1, \; s \neq i, \; k = 0, 1, \dots, n \quad \text{όπου } x_{m+1,0} = z_0, \; x_{m+1,k} = z_k - c_k, \; k = 1, \dots, n$$

Ισοδύναμα: Η i γραμμή του νέου tableau: $\Gamma_i' = \dfrac{\Gamma_i}{x_{ij}}$

Η $s \neq i$ γραμμή του νέου tableau: $\Gamma_s' = \Gamma_s - x_{sj}\Gamma_i'$

Βήμα 6. Πηγαίνουμε στο Βήμα 2

Παρατηρήσεις:

(i) Οι στήλες κάθε tableau που αντιστοιχούν στις βασικές (κάθε φορά) στήλες του πίνακα A, έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα με 0, εκτός του στοιχείου της αντίστοιχης γραμμής που είναι ίσο με 1.

(ii) Εφόσον η άριστη λύση βρίσκεται αν $z_k - c_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, συμφέρει σε κάθε tableau να υπολογίζουμε μετά την Γ_i' την Γ_{m+1} και μετά τα υπόλοιπα στοιχεία του tableau.

(iii) Στα Βήματα 3 και 4 αν υπάρχουν περισσότερα i ή j που πληρούν τα αντίστοιχα κριτήρια, διαλέγουμε ένα από αυτά αυθαίρετα.

(iv) Αν στο tableau που δίνει την άριστη λύση $z_k - c_k = 0$, για κάποια στήλη $\underset{\sim}{P_k}$ που δεν είναι βασική, τότε το π.γ.π. έχει άπειρο πλήθος άριστων λύσεων.

Παράδειγμα: Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex το π.γ.π.

$$\max(5x_1 - 4x_2)$$
$$-x_1 + x_2 \geq -6$$
$$3x_1 - 2x_2 \leq 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Λύση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\max(5x_1 - 4x_2)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_5 = 9$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 5$$

Με μορφή πινάκων $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}, \quad \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}, \quad \text{όπου } \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 9 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex έχουμε τα εξής tableaux:

B	c_B	$\tilde{b}$	5	−4	0	0	0	θ	
			$\tilde{P}_1$	$\tilde{P}_2$	$\tilde{P}_3$	$\tilde{P}_4$	$\tilde{P}_5$		
$\tilde{P}_3$	0	6	$\boxed{1}$	−1	1	0	0	6/1	Γ_1
$\tilde{P}_4$	0	24	3	−2	0	1	0	24/3	Γ_2
$\tilde{P}_5$	0	9	−2	3	0	0	1	−	Γ_3
	z	0	−5	4	0	0	0		Γ_4
$\tilde{P}_1$	5	6	1	−1	1	0	0	−	$\Gamma_1'=\Gamma_1/1$
$\tilde{P}_4$	0	6	0	$\boxed{1}$	−3	1	0	6/1	$\Gamma_2'=\Gamma_2-3\Gamma_1'$
$\tilde{P}_5$	0	21	0	1	2	0	1	21/1	$\Gamma_3'=\Gamma_3-(-2)\Gamma_1'$
	z	30	0	−1	5	0	0		$\Gamma_4'=\Gamma_4-(-5)\Gamma_1'$
$\tilde{P}_1$	5	12							
$\tilde{P}_2$	−4	6	0	1	−3	1	0		$\Gamma_2''=\Gamma_2'/1$
$\tilde{P}_5$	0	15							
	z	36	0	0	2	1	0		$\Gamma_4''=\Gamma_4-(-1)\Gamma_2''$

Ο πίνακας A περιέχει τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα, ο οποίος μας δίνει την πρώτη βάση $B=(\tilde{P}_3,\tilde{P}_4,\tilde{P}_5)$. Επομένως έχουμε την προφανή αρχική βασική εφικτή λύση $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=6$, $x_4=24$, $x_5=9$ ή $\tilde{x}_0=(0,0,6,24,9)'$, η οποία είναι μη εκφυλισμένη αφού $r(A)=3$.

1ο tableau: $z_1-c_1=-5<0$, άρα η στήλη $\tilde{P}_1$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min\{6/1, 24/3\}=6/1$, άρα η στήλη $\tilde{P}_3$ φεύγει από τη βάση. Πιλότος είναι το $x_{11}=1$.

2ο tableau: $z_2-c_2=-1<0$, άρα η στήλη $\tilde{P}_2$ μπαίνει στη βάση. Τότε $\min\{6/1, 21/1\}=6/1$, άρα η στήλη $\tilde{P}_4$ φεύγει από τη βάση. Πιλότος είναι το $x_{22}'=1$

3ο tableau: $z_k-c_k\geq 0$ $(k=1,\dots,5)$, άρα βρέθηκε η άριστη λύση που είναι:

$x_1=12$, $x_2=6$, $x_5=15$ ή $\tilde{x}=(12,6,0,0,15)'$. Η αντίστοιχη (άριστη) τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $Z=36$.

<u>Π.χ.</u> Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$
$$2x_2 - x_3 \leq 1$$
$$x_2 + 2x_4 \leq 8$$
$$x_i \geq 0,\ i=1,2,3,4$$

<u>Απάντηση:</u> Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι

$$\max(-x_1+2x_2-3x_3)$$
$$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$$
$$2x_2 - x_3 + x_5 = 1$$
$$x_2 + 2x_4 + x_6 = 8$$
$$x_i \geq 0,\ i=1,\dots,6$$

ή ισοδύναμα $\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$, $A\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{x}\geq \underset{\sim}{0}$ όπου $A=\begin{pmatrix}1&-1&1&2&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&1&0&2&0&1\end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{b}=\begin{pmatrix}10\\1\\8\end{pmatrix}$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex έχουμε τα εξής tableaux:

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	$10/2$	Γ_1
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	$-$	Γ_2
P_6	0	8	0	1	0	$\boxed{2}$	0	1	$8/2$	Γ_3
	Z	-10	0	-1	2	-2	0	0		Γ_4
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1		$\Gamma_1'=\Gamma_1-2\Gamma_3'$
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0		$\Gamma_2'=\Gamma_2$
P_4	0	4	0	$1/2$	0	1	0	$1/2$		$\Gamma_3'=\frac{1}{2}\Gamma_3$
	Z	-2	0	0	2	0	0	1		$\Gamma_4'=\Gamma_4+2\Gamma_3'$

Αφού $z_j - c_j \geq 0$, $j=1,\dots,6$, βρήκαμε μία άριστη λύση $\underset{\sim}{x}_1=(2,0,0,4,1,0)'$. Η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $Z=-2$.

Παρατηρούμε ότι στο τελικό tableau $z_2-c_2=0$, ενώ η στήλη $\underset{\sim}{P}_2$ δεν είναι βασική λύση. Επομένως αν εισάγουμε την $\underset{\sim}{P}_2$ στην βάση, παίρνουμε μία άλλη άριστη βασική εφικτή λύση. Πράγματι, αν κάνουμε βασική την $\underset{\sim}{P}_2$, η στήλη $\underset{\sim}{P}_5$ φεύγει από την βάση και καταλήγουμε στο tableau:

P_1	-1	3	1	0	0	0	1	-1	$\Gamma_1''=\Gamma_1'+2\Gamma_2''$
P_2	2	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	$\Gamma_2''=\frac{1}{2}\Gamma_2'$
P_3	0	$15/4$	0	0	$1/4$	1	$-1/4$	$1/2$	$\Gamma_3''=\Gamma_3'-\frac{1}{2}\Gamma_2''$
	Z	-2	0	0	2	0	0	1	$\Gamma_4''=\Gamma_4'$

που δίνει την άριστη λύση $\underset{\sim}{x}_2=(3,\ 1/2,\ 0,\ 15/4,\ 0,\ 0)'$ με $Z=-2$.

Το πρόβλημα έχει άπειρο πλήθος άριστων $\underset{\sim}{x}$ της μορφής:

$$\underset{\sim}{x}=\lambda \underset{\sim}{x}_1+(1-\lambda)\underset{\sim}{x}_2=\left(3-\lambda,\ \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\lambda,\ 0,\ \tfrac{15}{4}+\tfrac{1}{4}\lambda,\ \lambda,\ 0\right)',\quad 0\leq\lambda\leq 1.$$

π.χ. Να λυθεί το π.γ.π. με τη μέθοδο Simplex

$$\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 \quad\quad &= 11 \\ 2x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad &= 0 \\ 2x_4 \quad + x_6 &= 8 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6$$

Απάντηση: Το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή. ~~Η~~ αρχική βασική εφικτή λύση είναι η $\underset{\sim}{x_0} = (11, 0, 0, 0, 0, 8)'$, η οποία όμως είναι εκφυλισμένη αφού έχει δύο και όχι τρεις μη μηδενικές συντεταγμένες. Τη μετατρέπουμε σε μη εκφυλισμένη αντικαθιστώντας το 0 στη βασικής μεταβλητής x_5 με αυθαίρετο μικρό $\varepsilon > 0$ και συνεχίζουμε με τη μέθοδο Simplex μέχρι να βρούμε την άριστη λύση, οπότε θέτουμε πάλι $\varepsilon = 0$. Έχουμε λοιπόν $\underset{\sim}{x_0} = (11, 0, 0, 0, \underbrace{\varepsilon}_{\text{μικρός θετικός αριθμός}}, 8)'$ → μη εκφυλισμένη

			-1	2	-3	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_1	-1	11	1	$-1/2$	1	1	0	0	$-$	Γ_1
P_5	0	ε	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	$\varepsilon/2$	Γ_2
P_6	0	8	0	0	0	2	0	1	$-$	Γ_3
	z	-11	0	$-3/2$	2	-1	0	0		Γ_4
P_1	-1	$11+\varepsilon/4$	1	0	$3/4$	1	$1/4$	0	$11+\varepsilon/4$	$\Gamma_1' = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2'}{2}$
P_2	2	$\varepsilon/2$	0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	$-$	$\Gamma_2' = \frac{\Gamma_2}{2}$
P_6	0	8	0	0	0	$\boxed{2}$	0	1	4	$\Gamma_3' = \Gamma_3$
	z	$-11+\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	$5/4$	-1	$3/4$	0		$\Gamma_4' = \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_2'$
P_1	-1	$7+\frac{\varepsilon}{4}$								$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \Gamma_3''$
P_2	2	$\varepsilon/2$								$\Gamma_2'' = \Gamma_2'$
P_4	0	4	0	0	0	1	0	$1/2$		$\Gamma_3'' = \frac{1}{2}\Gamma_3'$
	z	$-7+\frac{3\varepsilon}{4}$	0	0	$5/4$	0	$3/4$	$1/2$		$\Gamma_4'' = \Gamma_4' + \Gamma_3''$

Θέτοντας $\varepsilon = 0$ παρατηρούμε ότι η άριστη λύση είναι η $\underset{\sim}{x} = (7, 0, 0, 4, 0, 0)'$ με $z = -7$.

Παράδειγμα: Να λυθεί το π.γ.π. με τη μέθοδο Simplex.

$$\min(x_1 - 3x_2 + 4x_3)$$

$$-7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 1$$

$$-2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 2$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4$$

Απάντηση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$-\max(-x_1+3x_2-4x_3)$$
$$-7x_1+x_2+3x_3-x_4+x_5 = 1$$
$$-2x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_6 = 2$$
$$x_i \geq 0,\ i=1,\dots,6$$

			-1	3	-4	0	0	0		
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ	
P_5	0	1	-7	$\boxed{1}$	3	-1	1	0	1	Γ_1
P_6	0	2	-2	2	3	1	0	1	1	Γ_2
	z	0	1	-3	4	0	0	0		Γ_3
P_2	3	1	-7	1	3	-1	1	0	$-$	$\Gamma_1'=\Gamma_1$
P_6	0	0	$\boxed{12}$	0	-3	3	-2	1	0	$\Gamma_2'=\Gamma_2-2\Gamma_1'$
	z	3	-20	0	13	-3	3	0		$\Gamma_3'=\Gamma_3+3\Gamma_1'$
P_2	3	1	0	1	$5/4$	$3/4$	$-1/6$	$7/12$		$\Gamma_1''=\Gamma_1'+7\Gamma_2''$
P_1	-1	0	1	0	$-1/4$	$1/4$	$-1/6$	$1/12$		$\Gamma_2''=\frac{1}{12}\Gamma_2'$
	z	3	0	0	8	2	$-1/3$	$5/3$		$\Gamma_3'''=\Gamma_3'+20\Gamma_2''$

Στο 3ο tableau τα στοιχεία της 5ης στήλης είναι $(-1/6,-1/6)'$ αρνητικά και επομένως το π.γ.π. δεν είναι φραγμένο διότι $z_5-c_5=-\frac{1}{3}<0$ (βλέπε Θεώρημα 7).

Άσκηση 4. Θεωρούμε το παρακάτω π.γ.π.

$$\max(2x_1+3x_2)$$
$$2x_1+x_2 \leq 4$$
$$x_1+2x_2 \leq 5$$
$$x_1,x_2 \geq 0$$

(i) Επιλύστε το πρόβλημα γραφικά

(ii) Γράψτε το πρόβλημα σε κανονική μορφή

(iii) Βρείτε όλες τις βασικές εφικτές λύσεις του π.γ.π. που είναι γραμμένο σε κανονική μορφή και εντοπίστε την άριστη λύση

(iv) Επιλύστε το π.γ.π. με τη μέθοδο Simplex

Τεχνητές Μεταβλητές (η Μ-μέθοδος)

Η εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex προϋποθέτει:
1) Το π.γ.π. να είναι σε κανονική μορφή
2) Ο πίνακας A να περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I.

Με χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών το π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή. Όμως μπορεί ο πίνακας A να μην περιέχει τον $m \times m$ μοναδιαίο πίνακα I. Η μέθοδος των τεχνητών μεταβλητών αντιμετωπίζει αυτό το πρόβλημα. Θα την αναπτύξουμε με το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα: Να λυθεί με την Μ-μέθοδο το π.γ.π.

$$\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$2x_3 - 3x_4 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Απάντηση: Το πρόβλημα είναι σε κανονική μορφή. Με μορφή πινάκων:

$$\begin{array}{l} \max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} \\ A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \\ \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{array}, \text{ όπου } \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

περιέχει μόνον την 1^{η} στήλη του $I_{3\times 3}$

Εισάγουμε δύο επιπλέον x_5 και x_6 για να δημιουργήσουμε τον $I_{3\times 3}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_3 - 3x_4 + x_6 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \tilde{A}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{b}, \text{ όπου}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε με τη μέθοδο Simplex το νέο π.γ.π.

$$\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + Mx_5 + Mx_6), \text{ όπου } M < \dots < 0, \text{ δηλαδή αυθαίρετα μικρός αρνητικός αριθμός.}$$

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} \underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{y} \end{pmatrix} = \underset{\sim}{b}, \quad \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}, \quad \underset{\sim}{y} \geq \underset{\sim}{0}.$$

Αφού ο αριθμός M είναι αυθαίρετα μικρός αρνητικός συμπεραίνουμε ότι, αν το αρχικό π.γ.π. έχει εφικτή λύση, η άριστη λύση του νέου π.γ.π. είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \hat{\underset{\sim}{x}} \\ \underset{\sim}{0} \end{pmatrix}$ και η $\hat{\underset{\sim}{x}}$ είναι η άριστη λύση του αρχικού π.γ.π.

			2	-3	1	2	M	M		
B	$\underset{\sim}{C_B}$	b	$\underset{\sim}{P_1}$	$\underset{\sim}{P_2}$	$\underset{\sim}{P_3}$	$\underset{\sim}{P_4}$	$\underset{\sim}{P_5}$	$\underset{\sim}{P_6}$	θ	
$\underset{\sim}{P_1}$	2	8	1	2	1	2	0	0	8	Γ_1
$\underset{\sim}{P_5}$	M	6	0	1	1	1	1	0	6	Γ_2
$\underset{\sim}{P_6}$	M	3	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	1	3/2	Γ_3
	z	16+9M	0	7+M	1+3M	2-2M	0	0		
$\underset{\sim}{P_1}$	2	13/2	1	2	0	7/2	0		13/7	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - \Gamma_3'$
$\underset{\sim}{P_5}$	M	9/2	0	1	0	$\boxed{5/2}$	1		9/5	$\Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_3'$
$\underset{\sim}{P_3}$	1	3/2	0	0	1	-3/2	0			$\Gamma_3' = \frac{1}{2}\Gamma_3$
	z	$\frac{29}{2} + \frac{9M}{2}$	0	7+M	0	$\frac{7}{2} + \frac{5M}{2}$	0			
$\underset{\sim}{P_1}$	2	1/5	1	3/5	0	0				$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{7}{2}\Gamma_2'$
$\underset{\sim}{P_4}$	2	9/5	0	2/5	0	1				$\Gamma_2'' = \frac{2}{5}\Gamma_2'$
$\underset{\sim}{P_3}$	1	21/5	0	3/5	1	0				$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \frac{3}{2}\Gamma_2'$
	z	41/5	0	28/5	0	0				

Η άριστη λύση του προβλήματος είναι η $\underset{\sim}{x} = (1/5, 0, 21/5, 9/5)'$ και η αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 41/5.

Σημείωση: Κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex, κάθε τεχνητή στήλη που φεύγει από την βάση μπορεί να διαγράφεται, εφόσον δεν πρόκειται να ξαναγίνει βασική σε επόμενα tableaux.

Παράδειγμα: Να λυθεί το π.γ.π.

$$\begin{aligned} &\min(3x_1 - x_2 + 2x_3) \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 9 \\ &5x_2 - x_3 \leq 1 \\ &4x_1 - x_2 \geq 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

με την Μ-μέθοδο

Απάντηση: Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} &-\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3) \\ &3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ &5x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ &4x_1 - x_2 - x_6 = 1 \\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 3 \\ &x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 7 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$$\begin{aligned} &-\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} \\ &A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \\ &\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{aligned}$$

, όπου

$\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_7)'$, $\underset{\sim}{c} = (-3, -1, -2, 0, 0, 0, 0)'$,

$$\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

· Εισάγουμε την τεχνητή μεταβλητή $x_8 \geq 0$ και έχουμε το νέο σύστημα περιορισμών:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad &= 9 \\
5x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad\qquad &= 1 \\
4x_1 - x_2 \qquad\qquad - x_6 \qquad + x_8 &= 1 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + x_7 \qquad &= 3
\end{aligned}
$$

$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 8$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα με την Μ-μέθοδο, δηλαδή το π.γ.π. $\max(-3x_1 + x_2 - 2x_3 + Mx_8)$, $M << 0$.

B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	θ	
P_4	0	9	3	2	−1	1	0	0	0	0	3	Γ_1
P_5	0	1	0	5	−1	0	1	0	0	0	−	Γ_2
P_8	M	1	$\boxed{4}$	−1	0	0	0	−1	0	1	1/4	Γ_3
P_7	0	3	1	1	1	0	0	0	1	0	3	Γ_4
	Z	M	4M+3	−M−1	2	0	0	−M	0	0		Γ_5
P_4	0	33/4	0	11/4	−1	1	0	3/4	0		33/11	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 3\Gamma_3'$
P_5	0	1	0	$\boxed{5}$	−1	0	1	0	0		1/5	$\Gamma_2' = \Gamma_2$
P_1	−3	1/4	1	−1/4	0	0	0	−1/4	0		−	$\Gamma_3' = \frac{1}{4}\Gamma_3$
P_7	0	11/4	0	5/4	1	0	0	1/4	0		11/5	$\Gamma_4' = \Gamma_4 - \Gamma_3'$
	Z	−3/4	0	−7/4	2	0	0	3/4	1			
P_4	0	77/10										$\Gamma_1'' = \Gamma_1' - \frac{11}{4}\Gamma_2''$
P_2	1	1/5	0	1	−1/5	0	1/5	0	0			$\Gamma_2'' = \frac{1}{5}\Gamma_2'$
P_1	−3	3/10										$\Gamma_3'' = \Gamma_3' + \frac{1}{4}\Gamma_2''$
P_7	0	5/2										$\Gamma_4'' = \Gamma_4' - \frac{5}{4}\Gamma_2''$
	Z	−7/10	0	0	39/20	0	1/20	3/4	0			$\Gamma_5'' = \Gamma_5' + \frac{1}{4}\Gamma_2''$

Αφού $z_j - c_j \geq 0 \; \forall j$ βρήκαμε την άριστη λύση. Η άριστη λύση του αρχικού π.γ.π. είναι $x = (3/10, 1/5, 0, 77/10, 0, 0, 5/2)'$ με αντίστοιχη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $Z = -(-7/10) = 7/10$.

<u>Παράδειγμα:</u> Ένας έχει 100.000 Ευρώ και θέλει να τα επενδύσει σε μετοχές τριών εταιριών Α, Β, Γ. Για να μειώσει τον επενδυτικό κίνδυνο δεν θέλει να επενδύσει περισσότερο από 40.000 ευρώ σε κάθε εταιρία. Η τιμή κάθε μετοχής και το ετήσιο μέρισμα πού δίνει είναι:

	A	B	Γ
Μετοχή	2000	1500	800
Μέρισμα	100	90	45

Πόσες μετοχές από κάθε εταιρία πρέπει ν' αγοράσει ώστε να μεγιστοποιήσει το ετήσιο κέρδος του; (Μπορούν να αγοραστούν και κλασματικές μονάδες μετοχής)

<u>Απάντηση:</u> Έστω ότι αγοράζει x_1, x_2, x_3 μετοχές από τις εταιρίες Α, Β, Γ αντίστοιχα. Έχουμε το π.γ.π.

$$\max(100x_1 + 90x_2 + 45x_3)$$
$$2000x_1 + 1500x_2 + 800x_3 = 100000$$
$$2000x_1 \leq 40000$$
$$1500x_2 \leq 40000$$
$$800x_3 \leq 40000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ή ισοδύναμα, θέτοντας $2000x_1 = Y_1$, $1500x_2 = Y_2$, $800x_3 = Y_3$

$$\max\left(\frac{1}{20}Y_1 + \frac{3}{50}Y_2 + \frac{9}{160}Y_3\right) = \frac{1}{800}\max(40Y_1 + 48Y_2 + 45Y_3)$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 100000$$
$$Y_1 \leq 40000$$
$$Y_2 \leq 40000$$
$$Y_3 \leq 40000$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\frac{1}{800}\max(40Y_1 + 48Y_2 + 45Y_3)$$
$$Y_1 + Y_2 + Y_3 = 100000$$
$$Y_1 + Y_4 = 40000$$
$$Y_2 + Y_5 = 40000$$
$$Y_3 + Y_6 = 40000$$
$$Y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6$$

Μπορούμε ν' αποφύγουμε τον υπολογισμό αρκετών tableaux αντικαθιστώντας την πρώτη εξίσωση με την διαφορά αυτής μείον το άθροισμα των τριών τελευταίων και μετά πολλαπλασιάζοντας επί (−1). Έτσι έχουμε το ισοδύναμο π.γ.π., στο οποίο οι τρεις τελευταίες στήλες του 4×4 μοναδιαίου πίνακα σχηματίζονται από τις στήλες των Y_1, Y_2, Y_3

$$\frac{1}{800}\max(40Y_1 + 48Y_2 + 45Y_3)$$
$$Y_4 + Y_5 + Y_6 = 20000$$
$$Y_1 + Y_4 = 40000$$
$$Y_2 + Y_5 = 40000$$
$$Y_3 + Y_6 = 40000$$
$$Y_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6$$

Εισάγοντας μία τεχνητή μεταβλητή y_7 στην πρώτη εξίσωση για να δημιουργήσουμε τον 4×4 μοναδιαίο πίνακα, θα λύσουμε το πρόβλημα με την Μ-μέθοδο.

B	C_B	b	P_1 (40)	P_2 (48)	P_3 (45)	P_4 (0)	P_5 (0)	P_6 (0)	P_7 (M)	θ	
P_7	M	$2\cdot 10^4$	0	0	0	$\boxed{1}$	1	1	1	$2\cdot 10^4$	Γ_1
P_1	40	$4\cdot 10^4$	1	0	0	1	0	0	0	$4\cdot 10^4$	Γ_2
P_2	48	$4\cdot 10^4$	0	1	0	0	1	0	0	-	Γ_3
P_3	45	$4\cdot 10^4$	0	0	1	0	0	1	0	-	Γ_4
	Z	$2\cdot 10^4 M + 532\cdot 10^4$	0	0	0	M+40	M+48	M+45	0		
P_4	0	$2\cdot 10^4$	0	0	0	1	1	1			$\Gamma_1'=\Gamma_1$
P_1	40	$2\cdot 10^4$	1	0	0	0	-1	-1			$\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1'$
P_2	48	$4\cdot 10^4$	0	1	0	0	1	0			$\Gamma_3'=\Gamma_3$
P_3	45	$4\cdot 10^4$	0	0	1	0	0	1			$\Gamma_4'=\Gamma_4$
	Z	$452\cdot 10^4$	0	0	0	0	8	5			

Αφού $Z_j - C_j \geq 0$ για όλα τα j, βρήκαμε την άριστη λύση που είναι $Y=(2\cdot 10^4, 4\cdot 10^4, 4\cdot 10^4, 2\cdot 10^4, 0, 0)'$, με $Z=(1/800)\cdot 452\cdot 10^4 = 5650$. Επομένως η άριστη λύση του αρχικού προβλήματος είναι η
$x_1 = \frac{2\cdot 10^4}{2000} = 10$, $x_2 = \frac{4\cdot 10^4}{1500} = \frac{80}{3}$, $x_3 = \frac{4\cdot 10^4}{800} = 50$ με $Z = 5650$. Δηλαδή για να μεγιστοποιηθεί το κέρδος θα πρέπει να αγοραστούν 10, 80/3, 50 μετοχές αντίστοιχα από τις εταιρίες Α, Β, Γ και το κέρδος τότε είναι 5650 Ευρώ.

Άσκηση 5

Μια εταιρία μεταφορών διαθέτει αεροπλάνα δύο τύπων A_1 και A_2, και θέλει να μεταφέρει 254 τόνους εμπορεύματος. Το A_1 μπορεί να μεταφέρει 22 τόνους εμπορεύματος, ενώ το A_2 12 τόνους. Για κάθε ταξίδι το A_1 κοστίζει 12000 Ευρώ και καταναλώνει 4000 λίτρα καύσιμα, ενώ το A_2 κοστίζει 10000 Ευρώ και καταναλώνει 900 λίτρα καύσιμα. Στην αποθήκη υπάρχουν 30800 λίτρα καύσιμα. Πόσα αεροπλάνα τύπου A_1 και A_2 πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς;

Απάντηση: Έστω x_i = # αεροπλάνων τύπου A_i, $i=1,2$, που χρησιμοποιούνται. Έχουμε το π.γ.π.

$$\left.\begin{aligned} &\min(12000x_1 + 10000x_2)\\ &22x_1 + 12x_2 = 254\\ &4000x_1 + 900x_2 \leq 30800\\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{aligned} &1000\cdot\min(12x_1 + 10x_2)\\ &11x_1 + 6x_2 = 127\\ &40x_1 + 9x_2 \leq 308\\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι:

$$\begin{aligned} &-1000\max(-12x_1 - 10x_2)\\ &11x_1 + 6x_2 = 127\\ &40x_1 + 9x_2 + x_3 = 308\\ &x_i \geq 0,\ i=1,2,3 \end{aligned}$$

Εισάγουμε την τεχνητή μεταβλητή x_4 στην 1η εξίσωση. Το νέο π.γ.π. είναι το

$$-\max(-12x_1 - 10x_2 + Mx_4)$$
$$11x_1 + 6x_2 \quad + x_4 = 127$$
$$40x_1 + 9x_2 + x_3 \quad = 308$$

$x_i \geq 0$, $i=1,2,3,4$, όπου M αυθαίρετα μικρός αρνητικός αριθμός

			-12	-10	0	M		
B	$\underset{\sim}{C_B}$	$\underset{\sim}{b}$	$\underset{\sim}{P_1}$	$\underset{\sim}{P_2}$	$\underset{\sim}{P_3}$	$\underset{\sim}{P_4}$	θ	
$\underset{\sim}{P_4}$	M	127	11	6	0	1	$127/11$	Γ_1
$\underset{\sim}{P_3}$	0	308	$\boxed{40}$	9	1	0	$308/40$	Γ_2
	Z	$127M$	$11M+12$	$6M+10$	0	0		Γ_3
$\underset{\sim}{P_4}$	M	$423/10$	0	$\boxed{141/40}$	$-11/40$	1	12	$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 11\Gamma_2'$
$\underset{\sim}{P_1}$	-12	$77/10$	1	$9/40$	$1/40$	0	$308/9$	$\Gamma_2' = \frac{1}{40}\Gamma_2$
	Z	$423/10M - \frac{462}{5}$	0	$\frac{141}{40}M + \frac{73}{10}$	$-\frac{11}{40}M - \frac{3}{10}$	0		
$\underset{\sim}{P_2}$	-10	12	0	1	$-11/141$			$\Gamma_1'' = \frac{40}{141}\Gamma_1'$
$\underset{\sim}{P_1}$	-12	5	1	0	$6/141$			$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \frac{9}{40}\Gamma_1''$
	Z	-180	0	0	$38/141$			

Αφού $z_j - c_j \geq 0 \ \forall j$ βρήκαμε την άριστη λύση που είναι η $\underset{\sim}{x} = (5,12,0)'$ με $Z = -1000(-180) = 180000$

Συνεπώς πρέπει να χρησιμοποιηθούν 5 αεροπλάνα τύπου A_1 και 12 αεροπλάνα τύπου A_2

Το Δυϊκό π.γ.π.

Έστω $M_{m \times n}$: το σύνολο των πινάκων με m γραμμές και n στήλες.

Ορισμός: Ένα π.γ.π. είναι σε ημικανονική μορφή αν έχει τη μορφή:

$$\pm \max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$$
$$A\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{b}$$
$$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$$
$$\underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{x} \in M_{n\times 1},\ \underset{\sim}{b} \in M_{m\times 1},\ A \in M_{m\times n}$$

Παρατηρήσεις: (i) Το διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ δεν είναι κατανάγκην μη αρνητικό. Δεν έχουμε εξισώσεις αλλά ανισώσεις της ίδιας φοράς. Αν στο αρχικό πρόβλημα είχαμε $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ την αντικαθιστούμε με το ισοδύναμο σύστημα ανισώσεων:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

και μετά αλλάζουμε τη φορά της δεύτερης πολλαπλασιάζοντας επί (-1)

(ii) Από την προηγούμενη παρατήρηση και το γεγονός ότι κάθε π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή, γίνεται φανερό ότι κάθε π.γ.π. μπορεί επίσης να τεθεί σε ημικανονική μορφή.

<u>Ορισμός</u>: Έστω το π.γ.π. σε ημικανονική μορφή

$$\begin{aligned} \pm \max\ & \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} \\ A\underset{\sim}{x} &\leq \underset{\sim}{b} \quad (\Pi), \text{ όπου } \underset{\sim}{c}, \underset{\sim}{x} \in M_{n\times 1},\ \underset{\sim}{b} \in M_{m\times 1},\ A \in M_{m\times n} \\ \underset{\sim}{x} &\geq \underset{\sim}{0} \end{aligned}$$

Ορίζουμε ως δυϊκό πρόβλημα του (Π), το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \pm \min\ & \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{w} \\ A'\underset{\sim}{w} &\geq \underset{\sim}{c} \quad (\Delta), \text{ όπου } \underset{\sim}{w} \in M_{m\times 1} \text{ και } A' \in M_{n\times m} \\ \underset{\sim}{w} &\geq \underset{\sim}{0} \end{aligned}$$

Το π.γ.π. (Π) αναφέρεται ως πρωτεύον.

<u>Οικονομική Ερμηνεία του Δυϊκού Προβλήματος</u>: Έστω ότι το (Π) έχει την εξής ερμηνεία: Είναι πρόβλημα παραγωγής που ο παραγωγός παράγει n διαφορετικά προϊόντα $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ χρησιμοποιώντας m διαφορετικά υλικά $Y_1, \dots, Y_m$. Οι παράμετροι του προβλήματος είναι:

- c_j : κέρδος από μία μονάδα του προϊόντος Π_j
- a_{ij} : απαιτούμενη ποσότητα από το υλικό Y_i για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος Π_j
- b_i : Η διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Y_i
- x_j : Η παραγόμενη ποσότητα του προϊόντος Π_j

Η αντικειμενική συνάρτηση = Το συνολικό κέρδος από την πώληση των προϊόντων. Ο i περιορισμός εκφράζει την απαίτηση: (Η συνολική ποσότητα του υλικού Y_i που καταναλώνεται) $\leq$ (Διαθέσιμη ποσότητα του υλικού Y_i)

Ας θεωρήσουμε κάποιον που ενδιαφέρεται να αγοράσει τα υλικά και προσπαθεί να διαμορφώσει τις τιμές που θα δώσει σε κάθε μονάδα του υλικού ώστε να δελεάσει τον παραγωγό. Έστω

w_i : Αξία μιας μονάδας του υλικού i

Για να δελεαστεί ο παραγωγός και να πωλήσει τα υλικά θα πρέπει για κάθε προϊόν j:

(Αξία των υλικών για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος j) $\geq$ (Τιμή μιας μονάδας του προϊόντος j)

Ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m &\geq c_1 \\ a_{12}w_1 + \dots + a_{m2}w_m &\geq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m &\geq c_n \\ w_1, \dots, w_m &\geq 0 \end{aligned}$$

Το ζητούμενο είναι:

$$\min(b_1w_1 + \dots + b_mw_m) \quad \text{δυϊκό του } (\Pi).$$

<u>Π.χ.</u> Ένα εργοστάσιο παράγει δύο κράματα (i) Cu-Fe κράμα με τιμή 3 χιλ. € ανά μονάδα (ii) Zn-Fe " " " 5 χιλ. € " "

Για την παραγωγή μιας μονάδας κράματος απαιτούνται οι παρακάτω μονάδες υλικών:

μέταλλο / κράμα	Cu	Zn	Fe
Cu-Fe	1	0	3
Zn-Fe	0	2	2

Οι διαθέσιμες ποσότητες των υλικών Cu, Zn, Fe είναι 4, 12, 18 μονάδες, αντίστοιχα.

Έστω x_1, x_2 οι παραγόμενη ποσότητη των Cu-Fe, Zn-Fe, αντίστοιχα. Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που πρέπει να λύσει το εργοστάσιο είναι:

$\max(3x_1+5x_2)$ $\longleftrightarrow$ μεγιστοποίηση κέρδους από παραγόμενα προϊόντα

$x_1 \leq 4$ $\longleftrightarrow$ Απαιτούμενη ποσότητα $Cu \leq$ Διαθέσιμη Ποσότητα Cu

$2x_2 \leq 12$ $\longleftrightarrow$ " " $Zn \leq$ " " Zn

$3x_1+2x_2 \leq 18$ $\longleftrightarrow$ " " $Fe \leq$ " " Fe

$x_1, x_2 \geq 0$

Θέτουμε: w_1, w_2, w_3 τιμές αγοράς (ανά μονάδα) των υλικών Cu, Zn, Fe. Το δυϊκό πρόβλημα που πρέπει να λύσει κάποιος που επιθυμεί την αγορά των μεταλλευμάτων-υλικών είναι:

$\min(4w_1+12w_2+18w_3)$ ← ελαχιστοποίηση της τιμής αγοράς των υλικών

$w_1 + 3w_3 \geq 3$ $\longleftrightarrow$ Αξία υλικών γιά μία μονάδα Cu-Fe $\geq$ Τιμή μονάδας Cu-Fe

$2w_2 + 2w_3 \geq 5$ $\longleftrightarrow$ " " " " Zn-Fe $\geq$ " " Zn-Fe

$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

Θεώρημα 9 Το Δυϊκό του (Δ) είναι το (Π)

Απόδειξη: Η κανονική μορφή του (Δ) είναι
$$-\max(-b)'w,\quad (-A)'w \leq -c,\quad w \geq 0$$
Το δυϊκό είναι
$$-\min(-c)'x,\quad (-A')x \geq -b,\quad x \geq 0$$
ή ισοδύναμα
$$+\max c'x,\quad Ax \leq b,\quad x \geq 0$$
, που είναι ακριβώς το (Π).

Π.χ. Να βρεθεί το δυϊκό του π.γ.π.

$$(\Pi)\quad \begin{aligned} &\max(5x_1+3x_2+2x_3+x_4)\\ &4x_1+3x_2+x_3+2x_4 \leq 6\\ &2x_1+2x_2+5x_3+x_4 = 4\\ &x_1, x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Απάντηση: $x_4 = x_4' - x_4''$, $x_4', x_4'' \geq 0$, $x_3 = -x_3'$, $x_3' \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} &\max(5x_1+3x_2-2x_3'+x_4'-x_4'')\\ &4x_1+3x_2-x_3'+2x_4'-2x_4'' \leq 6\\ &2x_1+2x_2-5x_3'+x_4'-x_4'' \leq 4\\ &-2x_1-2x_2+5x_3'-x_4'+x_4'' \leq -4\\ &x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'' \geq 0\end{aligned}\right\}\ (\Pi_1)$$

Το δυϊκό του (Π_1) είναι το π.γ.π.

$$\left.\begin{aligned} &\min(6w_1+4w_2-4w_3)\\ &4w_1+2w_2-2w_3 \geq 5\\ &3w_1+2w_2-2w_3 \geq 3\\ &-w_1-5w_2+5w_3 \geq -2\\ &2w_1+w_2-w_3 \geq 1\\ &-2w_1-w_2+w_3 \geq -1\\ &w_1, w_2, w_3 \geq 0\end{aligned}\right\}\ (\Delta_1)$$

$2w_1+w_2-w_3=1$

Θέτοντας $w_2' = w_2 - w_3$ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &\min(6w_1+4w_2')\\ &4w_1+2w_2' \geq 5\\ &3w_1+2w_2' \geq 3\\ &w_1+5w_2' \leq 2\\ &2w_1+w_2' = 1\\ &w_1 \geq 0,\ w_2' \in \mathbb{R}\end{aligned}\right\}\ (\Delta)$$

Παρατηρήσεις: (i) Αν μία μεταβλητή του ενός δεν έχει περιορισμό στο πρόσημο, ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι εξίσωση και αντίστροφα.

(ii) Αν μία μεταβλητή του ενός είναι μη θετική, τότε ο αντίστοιχος περιορισμός του άλλου είναι ανίσωση με φορά αντίθετη της αναφερόμενης και αντίστροφα. Ως αναφερόμενη φορά των περιορισμών εννοούμε την $\leq$ για πρόβλημα μεγιστοποίησης και την $\geq$ για πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

π.χ. Το δυϊκό του

$$\max(2x_1+3x_2+5x_3)$$
$$3x_1+4x_2+5x_3 \le 50$$
$$2x_1+x_2+2x_3 \ge 12$$
$$5x_1+3x_2+x_3 \le 30$$

είναι το:

$$\min(50w_1+12w_2+30w_3)$$
$$3w_1+2w_2+5w_3=2$$
$$4w_1+w_2+3w_3=3$$
$$5w_1+2w_2+w_3=5$$
$$w_1, w_3 \ge 0,\ w_2 \le 0$$

π.χ. Το δυϊκό του

$$\min(3x_1+5x_2+2x_3)$$
$$2x_1+3x_2+x_3=21$$
$$3x_1+x_2+4x_3=38$$

είναι το:

$$\max(21w_1+38w_2)$$
$$2w_1+3w_2=3$$
$$3w_1+w_2=5$$
$$w_1+4w_2=2$$

Άσκηση 6. Βρείτε το δυϊκό του

$$\min(2x_1+3x_2-4x_3+5x_4)$$
$$3x_1+2x_2+x_3-2x_4 \le 19$$
$$2x_1+3x_2-x_3+3x_4 \ge 22$$
$$x_1-x_2+2x_3-3x_4=38$$
$$x_i \ge 0,\ i=1,2,3,4$$

Έστω F_x, F_w εφικτές περιοχές των π.γ.π. (Π) και (Δ), αντίστοιχα.

Θεώρημα 10. Αν $\underset{\sim}{x} \in F_x$ και $\underset{\sim}{w} \in F_w$ τότε $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} \le \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{w}$.

Θεώρημα 11. Αν $\hat{\underset{\sim}{x}} \in F_x$, $\hat{\underset{\sim}{w}} \in F_w$ και $\underset{\sim}{c}'\hat{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{b}'\hat{\underset{\sim}{w}}$ τότε οι $\hat{\underset{\sim}{x}}$, $\hat{\underset{\sim}{w}}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ), αντίστοιχα.

Θεώρημα 12. (i) Αν το (Π) έχει άριστη λύση, τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεών τους είναι ίσες.

(ii) Αν το (Π) είναι μη φραγμένο, τότε το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

Θεώρημα 13. Αν $\hat{\underset{\sim}{x}}$, $\hat{\underset{\sim}{w}}$ είναι άριστες λύσεις των (Π), (Δ), αντίστοιχα, τότε:

$$\hat{x}_i(a_{1i}\hat{w}_1+a_{2i}\hat{w}_2+\cdots+a_{mi}\hat{w}_m-c_i)=0,\quad i=1,\dots,n,$$
$$\hat{w}_i(a_{i1}\hat{x}_1+a_{i2}\hat{x}_2+\cdots+a_{in}\hat{x}_n-b_i)=0,\quad i=1,\dots,m$$

Παρατήρηση: Όταν γνωρίζουμε την άριστη λύση του (Π) τότε μπορούμε να βρούμε την άριστη λύση του (Δ) χωρίς τη χρησιμοποίηση της μεθόδου Simplex αλλά απλώς λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

π.χ. Δίνεται το π.γ.π.

$$\max(2x_1-3x_2+x_3+2x_4)$$
$$x_1+2x_2+x_3+2x_4=8$$
$$x_2+x_3+x_4=6$$
$$2x_3-3x_4=3$$
$$x_i \ge 0,\ i=1,2,3,4$$

με άριστη λύση $\hat{\underset{\sim}{x}}=(1/5, 0, 21/5, 9/5)'$. Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού του.

Λύση: Το δυϊκό π.γ.π. είναι το

$$\min(8w_1+6w_2+3w_3)$$
$$w_1 \ge 2$$
$$2w_1+w_2 \ge -3$$
$$w_1+w_2+2w_3 \ge 1$$
$$2w_1+w_2-3w_3 \ge 2$$

Έχουμε το σύστημα (από το Θεώρημα 13)

$$\left.\begin{aligned}\hat{w}_1&=2\\ \hat{w}_1+\hat{w}_2+2\hat{w}_3&=1\\ 2\hat{w}_1+\hat{w}_2-3\hat{w}_3&=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\hat{w}_1&=2\\ \hat{w}_2&=-\tfrac{7}{5}\\ \hat{w}_3&=\tfrac{1}{5}\end{aligned}$$

Η άριστη τιμή των αντικειμενικών συναρτήσεων των δύο προβλημάτων είναι $z=41/5$.

Άσκηση 7. Έστω π.γ.π.

$$\max(x_1+x_2-3x_3-2x_4)$$
$$2x_1+2x_2-5x_3+5x_4 \le 20$$
$$-x_1+x_2+4x_3-2x_4 \le 12$$
$$x_i \ge 0,\ i=1,2,3,4$$

Γι' αυτό το πρόβλημα και το δυϊκό του δίνονται οι εφικτές λύσεις: $\underset{\sim}{x}=(5,5,0,0)'$, $\underset{\sim}{w}=(1/3, 0)'$. Είναι αυτές άριστες λύσεις;

Δυναμικός Προγραμματισμός

Μοντέλα πεπερασμένου ορίζοντα

Έστω ότι παρατηρούμε μία εν εξελίξει διαδικασία κατά τις χρονικές στιγμές $t=1$, $t=2$, ..., $t=n$, $t=n+1$. Υποθέτουμε ότι, αν σε κάποια χρονική στιγμή η διαδικασία είναι π.χ. στην κατάσταση i, μπορούμε να επιλέξουμε μία ενέργεια (ή απόφαση) $a \in A$ και ότι, υπό την επίδραση αυτής της ενέργειας η κατάσταση της διαδικασίας την επόμενη χρονική στιγμή είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$. Αυτή η μετάβαση επιφέρει ένα κέρδος, η μέση τιμή του οποίου είναι ίση με $R(i,a)$. Το σύνολο A των ενεργειών (ή αποφάσεων) θεωρείται πεπερασμένο.

Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι να βρούμε την πολιτική (δηλαδή έναν κανόνα επιλογής ενεργειών) εκείνη που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος που λαμβάνεται από την χρονική στιγμή $t=1$ μέχρι την χρονική στιγμή $t=n+1$.

Έστω $V(i,t)$, $t=1,\dots,n,n+1$, το μέγιστο κέρδος από την χρονική στιγμή t μέχρι την $n+1$ αν η διαδικασία κατά την χρονική στιγμή t βρίσκεται στην κατάσταση i.

Αν $t=n+1$, προφανώς

$$V(i,n+1)=0$$

Αν $t=n$, έχουμε

$$V(i,n)=\max_{a\in A} R(i,a) \qquad (1)$$

Βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t=n$ η βέλτιστη πολιτική επιλέγει εκείνη την ενέργεια που μεγιστοποιεί το δεξί μέλος της (1).

Έστω ότι την χρονική στιγμή t είμαστε στην κατάσταση i και επιλέγουμε την ενέργεια a. Τότε λαμβάνουμε ένα κέρδος $R(i,a)$ και η επόμενη κατάσταση είναι η κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$. Το καλύτερο που μπορούμε να πετύχουμε (υπό την έννοια του αναμενόμενου κέρδους) αν την χρονική στιγμή t επιλέξουμε την ενέργεια a είναι ίσο με

$$R(i,a) + \sum_j p_{ij}(a) V(j, t+1)$$

Εφόσον $V(i,t+1)$ είναι ότι το καλύτερο μπορούμε να πετύχουμε βλέπουμε ότι

$$V(i,t) = \max_{a \in A} \left[R(i,a) + \sum_j p_{ij}(a) V(j, t+1) \right] \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) είναι γνωστή ως εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού και παρέχει μία μέθοδο για τον υπολογισμό του $V(i,1)$ αναγωγικά. Καταρχήν υπολογίζουμε την ποσότητα $V(i,n)$ από την σχέση (1). Κατόπιν, θέτοντας $t=n-1$ στην (2), υπολογίζουμε την ποσότητα $V(i,n-1)$ και συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία $n-2$ φορές βρίσκουμε την ποσότητα $V(i,1)$.

Η βέλτιστη πολιτική είναι η ακόλουθη: Όταν είμαστε στην χρονική στιγμή $t = n, n-1, \ldots, 1$ και η κατάσταση της διαδικασίας είναι η κατάσταση i, τότε επιλέγεται η ενέργεια a που μεγιστοποιεί το δεξί μέλος της (2).

Ο παραπάνω ισχυρισμός μπορεί ν' αποδειχθεί με επαγωγή ως προς n [βλέπε Derman (1970, σελ. 13)].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Μπορούμε να έχουμε αναμενόμενο κόστος $C(i,a)$ αντί για αναμενόμενο κέρδος $R(i,a)$. Σε αυτήν την περίπτωση ενδιαφέρει η εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος. Τότε η εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού παίρνει τη μορφή:

$$V(i,t) = \min_{a \in A} \left[C(i,a) + \sum_j p_{ij}(a) V(j, t+1) \right]$$

– Έστω $V_k(i)$, $k=0,\dots,n$, το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος (ή ελάχιστο αναμενόμενο κόστος) αν η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i και απομένουν k βήματα (δηλαδή χρονικές περίοδοι) μέχρι την χρονική στιγμή $n+1$. Οι εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού παίρνουν την εξής μορφή:

$$V_k(i) = \max_{a \in A} \left[R(i,a) + \sum_j p_{ij}(a) V_{k-1}(j) \right], \quad k=1,2,\dots,n$$

με $V_0(i)=0$

και

$$V_k(i) = \min_{a \in A} \left[C(i,a) + \sum_j p_{ij}(a) V_{k-1}(j) \right], \quad k=1,2,\dots,n$$

με $V_0(i)=0$

– Το σύνολο των ενεργειών A μπορεί να είναι άπειρο.

– Πολλές φορές η "επόμενη κατάσταση" j δεν εξαρτάται από την πιθανότητα $p_{ij}(a)$ αλλά από μία πυκνότητα.

– Η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής λύνοντας αναγωγικά την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού απαιτεί πολλούς υπολογισμούς. Πολλές φορές όμως μπορούμε να βρούμε μία συγκεκριμένη έκφραση του $V(i,t)$ (ή ισοδύναμα του $V_k(i)$) ή να δείξουμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού ότι η βέλτιστη πολιτική έχει μία συγκεκριμένη μορφή.

– Το μοντέλο που περιγράψαμε είναι στοχαστικό. Αν γιά κάθε κατάσταση i και ενέργεια a ισχύει $p_{ij}(a)=0$, γιά $j \neq j_0$, και $p_{ij_0}(a)=1$ για μία δεδομένη κατάσταση j_0 τότε το μοντέλο γίνεται ντετερμινιστικό. Θα δώσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα στοχαστικών και ντετερμινιστικών μοντέλων.

Παράδειγμα (ένα μοντέλο σχετιζόμενο μ' ένα τυχερό παιχνίδι)

Έστω ότι ένας παίκτης μπορεί να στοιχηματίσει οποιαδήποτε μη αρνητική ποσότητα από την περιουσία του και κερδίζει ή χάνει αυτήν την ποσότητα με πιθανότητες p και $q=1-p$, αντίστοιχα. Ο παίκτης έχει δικαίωμα να στοιχηματίσει n φορές και ο στόχος του είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της τελικής του περιουσίας. Το πρόβλημα είναι η εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής που πρέπει να ακολουθήσει.

Απάντηση: Έστω $V_n(x)$ η μέγιστη αναμενόμενη τιμή του λογαρίθμου της τελικής του περιουσίας, αν η παρούσα περιουσία του παίκτη είναι ίση με x και έχει δικαίωμα να πάρει μέρος σε n στοιχήματα. Ως ενέργεια του παίκτη θεωρούμε το κλάσμα (ποσοστό) της περιουσίας του που στοιχηματίζει. Γι' αυτό το πρόβλημα η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

$$V_n(x) = \max_{0\leq\alpha\leq 1}\left[p\cdot V_{n-1}(x+\alpha x)+q V_{n-1}(x-\alpha x)\right] \qquad (3)$$

με οριακή συνθήκη $V_0(x)=\log x$

1η περίπτωση: $p\leq \frac{1}{2}$

Σε αυτήν την περίπτωση $V_n(x)=\log x$ και η βέλτιστη πολιτική είναι ο παίκτης να στοιχηματίζει πάντοτε 0 ['Ασκηση 1]

2η περίπτωση: $p>\frac{1}{2}$

Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη, από την (3) με $n=1$ έχουμε:

$$V_1(x) = \max_{0\leq\alpha\leq 1}\left[p\cdot\log(x+\alpha x)+q\log(x-\alpha x)\right]$$

$$= \max_{0\leq\alpha\leq 1}\left[p\log(1+\alpha)+q\log(1-\alpha)\right]+\log x \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας γνώσεις απειροστικού λογισμού συμπεραίνουμε ότι το maximum στην παραπάνω εξίσωση επιτυγχάνεται όταν $\alpha=p-q$. Έτσι

$V_1(x) = C + \log x$, όπου

$$C_1 = \log_2 2 + p\log_2 p + q\log_2 q.$$

Από την (3) με $n=2$ έχουμε

$$V_2(x) = \max_{0\leq \alpha \leq 1} \left[p\log_2(x+\alpha x) + q\log_2(x-\alpha x)\right] + C_1$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την (4), διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη ενέργεια είναι να στοιχηματίσει πάλι το $(p-q)\%$ της περιουσίας του και ότι

$$V_2(x) = 2\cdot C_1 + \log_2 x.$$

Επαγωγικά μπορεί να δειχθεί ότι $V_n(x) = nC_1 + \log_2 x$ και ότι η βέλτιστη ενέργεια είναι να στοιχηματίζει πάντοτε το $(p-q)\%$ της περιουσίας του. □

Παράδειγμα Ένας αγροτικός συνεταιρισμός έχει στη διάθεσή του ένα μεγάλο αγρό. Η παραγωγικότητα του αγρού ελέγχεται κάθε χρόνο και κατατάσσεται σε μία από τις καταστάσεις, 1: άριστη, 2: καλή, 3 μέτρια. Η κατάσταση του αγρού το επόμενο έτος εξαρτάται από την κατάστασή του φέτος, μέσω του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbb{P}(1) = \left(p_{ij}(1)\right) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

π.χ. αν φέτος η κατάσταση του αγρού είναι καλή, τότε το επόμενο έτος θα είναι καλή ή μέτρια, με ίσες πιθανότητες.

Η παραγωγικότητα του αγρού μπορεί να βελτιωθεί με την χρησιμοποίηση λιπασμάτων. Συγκεκριμένα, αν στην αρχή του έτους ο αγρός λιπανθεί, τότε ο προηγούμενος πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αλλάζει και γίνεται

$$\mathbb{P}(2) = \left(p_{ij}(2)\right) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$

Έτσι ανάλογα με την κατάσταση του αγρού, υπάρχουν στην αρχή κάθε έτους οι αποφάσεις μη λίπανσης (1), ή λίπανσης (2). Οι αντίστοιχοι πίνακες αμοιβής είναι

$$R(1) = (r_{ij}(1)) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R(2) = (r_{ij}(2)) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

π.χ. Αν η κατάσταση του αγρού φέτος είναι καλή και ο αγρός δεν λιπανθεί, τότε το κέρδος του συνεταιρισμού είναι 5 ή 1 χρηματικές μονάδες, ανάλογα αν το επόμενο έτος η κατάστασή του παραμείνει καλή ή γίνει μέτρια. Αν όμως ο αγρός λιπανθεί, το κέρδος είναι 7, 4, 0, ανάλογα αν η κατάστασή του το επόμενο έτος βελτιωθεί, μείνει η ίδια ή χειροτερέψει αντίστοιχα.

Ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \{1,2,3\}$ και οι ενέργειες σε κάθε κατάσταση είναι 1: μη λίπανση και 2: λίπανση.

Τα κέρδη $R(i,a)$ υπολογίζονται ως μέσες τιμές από τις σχέσεις

$$R(i,a) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(a)\, r_{ij}(a) \qquad i = 1,2,3 \quad \text{και} \quad a = 1,2.$$

π.χ. $R(1,1) = (0.2)\cdot 7 + (0.5)\cdot 6 + (0.3)\cdot 3 = 5.3$

$R(2,2) = (0.1)\cdot 7 + (0.6)\cdot 4 = 3.1$

Έστω $V(i,t)$, $t = 1,2,3,4$ το μέγιστο κέρδος από την αρχή του έτους t μέχρι την αρχή του έτους 4 αν η κατάσταση του αγρού κατά το έτος t είναι η κατάσταση i. Αυτή η ποσότητα βρίσκεται αναδρομικά χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού:

$$V(i,t) = \max_{a \in \{1,2\}} \left[R(i,a) + \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(a) V(j,t+1) \right], \quad i = 1,2,3, \quad t = 1,2,3$$

$$V(i,4) = 0, \quad i = 1,2,3$$

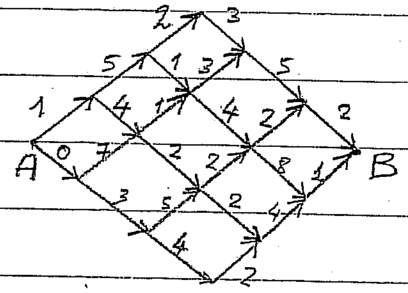
Τα αριθμητικά αποτελέσματα καθώς και οι ενέργειες που επιλέγονται από την βέλτιστη πολιτική παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα.

t	x	α	c(x, α)	υ(t, x)
1	1	1 2*	5.3 4.7	$5.3 + (0.2)(8.19) + (0.5)(5.61) + (0.3)(2.13) = 10.38$ $4.7 + (0.3)(8.19) + (0.6)(5.61) + (0.1)(2.13) = 10.74^*$
	2	1 2*	3 3.1	$3 + 0(8.19) + (0.5)(5.61) + (0.5)(2.13) = 6.87$ $3.1 + (0.1)(8.19) + (0.6)(5.61) + (0.3)(2.13) = 7.92^*$
	3	1 2*	−1 0.4	$(-1) + 0(8.19) + 0(5.61) + 1(2.13) = 1.13$ $0.4 + \sum p_{3j}(2)\,\upsilon(2, j)$ $= 0.4 + (0.5)(8.19) + (0.4)(5.61) + (0.55)(2.13) = 4.23^*$
2	1	1 2*	5.3 4.7	$5.3 + (0.2)(5.3) + (0.5)(3.1) + (0.3)(0.4) = 8.03$ $4.7 + (0.3)(5.3) + (0.6)(3.1) + (0.1)(0.4) = 8.19^*$
	2	1 2*	3 3.1	$3 + 0(5.3) + (0.5)(3.1) + (0.5)(0.4) = 4.75$ $3.1 + (0.1)(5.3) + (0.6)(3.1) + (0.3)(0.4) = 5.61^*$
	3	1 2*	−1 0.4	$(-1) + 0(5.3) + 0(3.1) + 1(0.4) = -0.6$ $0.4 + \sum p_{3j}(2)\,\upsilon(3, j)$ $= 0.4 + (0.05)(5.3) + (0.4)(3.1) + (0.55)(0.4) = 2.13^*$
3	1	1* 2	5.3 4.7	5.3* 4.7
	2	1 2*	3 3.1	3 3.1*
	3	1 2*	−1 0.4	−1 0.4*
4	1 2 3	–	–	0 0 0

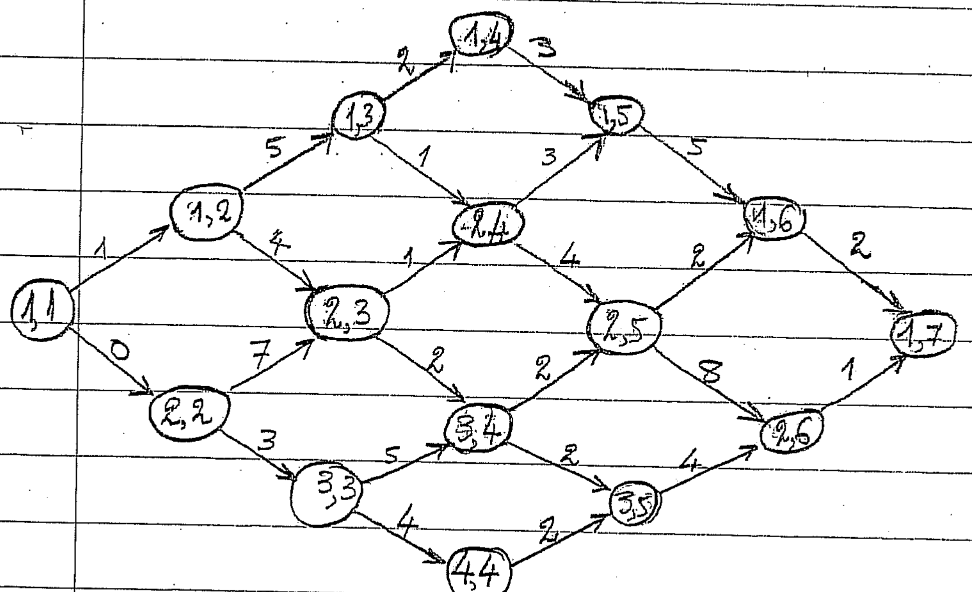
Επομένως για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου συνολικού κέρδους, ο αγρός πρέπει να λιπανθεί τα δύο πρώτα έτη, ανεξάρτητα από την κατάστασή του, ενώ το τρίτο έτος αυτό πρέπει να γίνει μόνο στην περίπτωση που η κατάσταση του αγρού δεν είναι άριστη.

– Το αντίστοιχο μέγιστο κέρδος είναι 10.74, 7.92 ή 4.23, ανάλογα αν στην αρχή του πρώτου έτους η παραγωγικότητα του αγρού είναι άριστη, καλή ή μέτρια αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή από το σημείο A μέχρι το σημείο B για το παρακάτω προσανατολισμένο δίκτυο:



<u>Απάντηση</u>: Το πρόβλημα αποτελείται από 6 βήματα, δηλαδή $n=6$. Συμβολίζοντας με (i,t) τον i-οστό κόμβο στην αρχή του t-οστού βήματος, το παραπάνω δίκτυο παίρνει την μορφή:



Έστω $V(i,t)$ το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από την κατάσταση (i,t) μέχρι την κατάσταση $(1,7)$. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού γι'αυτό το πρόβλημα είναι

$$V(i,t) = \min_j \{ c(i,j) + V(j,t+1) \}, \quad t=1,\dots,6,$$

$$V(1,7) = 0,$$

όπου $c(i,j)$ είναι η απόσταση ανάμεσα στον i-οστό από τον j-οστό κόμβο. Η επίλυση της παραπάνω εξίσωσης γίνεται αναδρομικά ως εξής:

Γιά $t=6$.

$V(1,6)=2$ $\qquad j^*(1,6)=(1,7)$

$V(2,6)=1$ $\qquad j^*(2,6)=(1,7)$

Για $t=5$

$V(1,5)=5+V(1,6)=5+2=7$ $\qquad j^*(1,5)=(1,6)$

$$V(2,5)=\min\begin{Bmatrix}2+V(1,6)=2+2=4^*\\ 8+V(2,6)=8+1=9\end{Bmatrix}=4 \qquad j^*(2,5)=(1,6)$$

$V(3,5)=4+V(2,6)=4+1=5$ $\qquad j^*(3,5)=(2,6)$

Γιά $t=4$

$V(1,4)=3+V(1,5)=3+7=10$ $\qquad j^*(1,4)=(1,5)$

$$V(2,4)=\min\begin{Bmatrix}3+V(1,5)=3+7=10\\ 4+V(2,5)=4+4=8^*\end{Bmatrix}=8 \qquad j^*(2,4)=(2,5)$$

$$V(3,4)=\min\begin{Bmatrix}2+V(2,5)=2+4=6^*\\ 2+V(3,5)=2+5=7\end{Bmatrix}=6 \qquad j^*(3,4)=(2,5)$$

$V(4,4)=2+V(3,5)=2+5=7$ $\qquad j^*(4,4)=(3,5)$

Για $t=3$

$$V(1,3)=\min\begin{Bmatrix}2+V(1,4)=2+10=12\\ 1+V(2,4)=1+8=9^*\end{Bmatrix}=9 \qquad j^*(1,3)=(2,4)$$

$$V(2,3)=\min\begin{Bmatrix}1+V(2,4)=1+8=9\\ 2+V(3,4)=2+6=8^*\end{Bmatrix}=8 \qquad j^*(2,3)=(3,4)$$

$$V(3,3)=\min\begin{Bmatrix}5+V(3,4)=5+6=11^*\\ 4+V(4,4)=4+7=11^*\end{Bmatrix}=11 \qquad j^*(3,3)=(4,3)$$

ή $(4,4)$

Για $t=2$

$$V(1,2) = \min \begin{Bmatrix} 5+V(1,3) = 5+9 = 14 \\ 4+V(2,3) = 4+8 = 12^{*} \end{Bmatrix} = 12, \qquad j^{*}(1,2) = (2,3)$$

$$V(2,2) = \min \begin{Bmatrix} 7+V(2,3) = 7+8 = 15 \\ 3+V(3,3) = 3+11 = 14^{*} \end{Bmatrix} = 14, \qquad j^{*}(2,2) = (3,3)$$

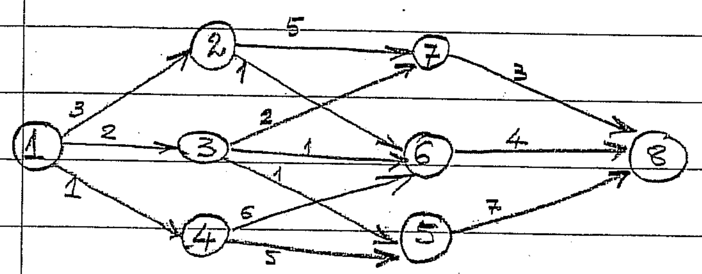
Γιά $t=1$

$$V(1,1) = \min \begin{Bmatrix} 1+V(2,1) = 1+12 = 13 \\ 0+V(2,2) = 0+14 = 14 \end{Bmatrix} = 13, \qquad j^{*}(1,1) = (1,2)$$

Άρα η τιμή της βέλτιστης διαδρομής είναι $V(1,1)=13$, ενώ η αντίστοιχη βέλτιστη διαδρομή είναι η

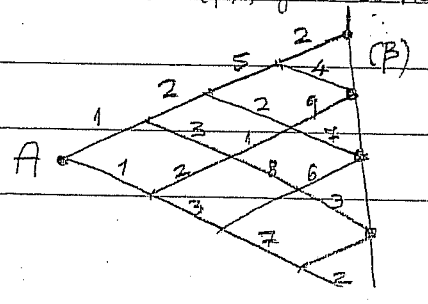
$$(1,1) \longrightarrow (1,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (3,4) \longrightarrow (2,5) \longrightarrow (1,6) \longrightarrow (1,7) \qquad \square$$

<u>Άσκηση 2.</u> Θεωρούμε ένα σύνολο από πόλεις που συνδέονται μεταξύ τους μέσω του παρακάτω οδικού δικτύου



Οι αριθμοί δίπλα στις ακμές του δικτύου συμβολίζουν τα μήκη των αντίστοιχων δρόμων. Ζητείται να βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή (δηλαδή η διαδρομή ελάχιστου μήκους) καθώς και η μέγιστη διαδρομή (δηλαδή η διαδρομή μέγιστου μήκους) από την πόλη 1 στην πόλη 8.

<u>Άσκηση 3.</u> Να βρεθεί ελάχιστη διαδρομή μεταξύ του σημείου A και οποιουδήποτε σημείου πάνω στην ευθεία (B), γιά το παρακάτω δίκτυο.



Π.χ. (Παραγωγή ενός αποδεκτού προϊόντος)

Μία εταιρία έχει λάβει μία παραγγελία για την προμήθεια ενός τεμαχίου κάποιου προϊόντος. Όμως, ο πελάτης έχει υψηλές απαιτήσεις ως προς την ποιότητα και, συνεπώς, η εταιρία ίσως πρέπει να κατασκευάσει περισσότερα του ενός τεμαχίου μέχρι την κατασκευή ενός αποδεκτού τεμαχίου.

Η εταιρία εκτιμά ότι κάθε κατασκευαζόμενο τεμάχιο του προϊόντος είναι αποδεκτό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και ελαττωματικό με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Συνεπώς, αν κατασκευαστούν L τεμάχια, η πιθανότητα να μην υπάρχει κανένα αποδεκτό ισούται με $(\frac{1}{2})^L$.

Το κόστος παραγωγής ενός τεμαχίου του προϊόντος ισούται με 100 \$. Το κόστος για το στήσιμο (setup cost) μιας διαδικασίας παραγωγής ισούται με 300 \$. Αν μία διαδικασία παραγωγής (production run) δεν δώσει κανένα αποδεκτό τεμάχιο τότε η εταιρία προχωρά σε μία νέα διαδικασία παραγωγής. Μπορούν να γίνουν το πολύ 3 διαδικασίες παραγωγής. Αν κανένα αποδεκτό τεμάχιο του προϊόντος δεν έχει παραχθεί μετά το τέλος της τρίτης διαδικασίας παραγωγής, η εταιρία πληρώνει το ποσό \$ 1600 ως πρόστιμο.

Το πρόβλημα είναι να προσδιοριστεί το πλήθος των κατασκευαζόμενων τεμαχίων του προϊόντος σε κάθε διαδικασία παραγωγής, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος.

Απάντηση: Έστω i η κατάσταση του συστήματος στην αρχή της t-οστής διαδικασίας παραγωγής ($t=1,2,3$). Θεωρούμε ότι $i=1$ αν δεν έχει παραχθεί κανένα αποδεκτό τεμάχιο και $i=0$ αν έχει παραχθεί τουλάχιστον ένα αποδεκτό τεμάχιο.

Προφανώς όταν $t=1$ τότε $i=1$. Αν κατά την 1η διαδικασία παραγωγής δεν παραχθεί κανένα αποδεκτό τεμάχιο τότε $i=1$ όταν $t=2$, ενώ αν κατά την 1η διαδικασία παραγωγής παραχθεί τουλάχιστον ένα αποδεκτό τεμάχιο τότε $i=0$ όταν $t=2$.

Έστω x_t = αριθμός των κατασκευαζομένων τεμαχίων του προϊόντος κατά την t-οστή διαδικασία παραγωγής, $t=1,2,3$.

Έστω $V(i,t)$ = το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος αν βρισκόμαστε στην κατάσταση i κατά την t-οστή διαδικασία παραγωγής.

Προφανώς $V(0,t)=0$, $t=2,3$

Έστω ότι η μονάδα κόστους = 100 \$ και $K(x_t)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x_t=0 \\ 3 & \text{"} \ x_t>0 \end{cases}$

Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V(1,t)=\min_{x_t=0,1,2,\dots}\left\{K(x_t)+x_t+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_t}\cdot V(1,t+1)+\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_t}\right]\cdot V(0,t+1)\right\}$$

$$=\min_{x_t=0,1,2,\dots}\left\{K(x_t)+x_t+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x_t}V(1,t+1)\right\},\quad t=3,2,1$$

$V(1,4)=16$.

Η παραπάνω αναδρομική σχέση δίνει τα εξής αριθμητικά αποτελέσματα

$t=3$, $K(x_3)+x_3+16\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$

$i \backslash x_3$	0	1	2	3	4	5	$V(i,3)$	x_3^*
0	0						0	0
1	16	12	9	8	8	$8\frac{1}{2}$	8	3 ή 4

$t=2$, $K(x_2)+x_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}V(1,3)$

$i \backslash x_2$	0	1	2	3	4	$V(i,2)$	x_2^*
0	0					0	0
1	8	8	7	7	$7\frac{1}{2}$	7	2 ή 3

$t=1$, $K(x_1)+x_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}V(1,2)$

$i \backslash x_1$	0	1	2	3	4	$V(i,1)$	x_1^*
1	7	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	$6\frac{7}{8}$	$7\frac{7}{16}$	$6\frac{3}{4}$	2

Συνεπώς η βέλτιστη πολιτική παράγει δύο τεμάχια κατά την πρώτη διαδικασία. Αν κανένα δεν είναι αποδεκτό τότε παράγει δύο ή τρία τεμάχια κατά την δεύτερη διαδικασία. Αν κανένα δεν είναι αποδεκτό τότε παράγει τρία ή τέσσερα τεμάχια κατά την τρίτη διαδικασία. Το συνολικό αναμενόμενο κόστος αυτής της πολιτικής είναι \$675.

Παράδειγμα (μεγιστοποίηση της πιθανότητας να κερδίσουμε ένα στοίχημα)

Ένας στατιστικός πιστεύει ότι έχει αναπτύξει ένα σύστημα που του επιτρέπει να κερδίζει ένα δημοφιλές τυχερό παιχνίδι. Έχει βάλει ένα στοίχημα με συναδέλφους του σύμφωνα με το οποίο αν ξεκινήσει με 3 μάρκες θα έχει τουλάχιστον 5 μάρκες μετά από τρία παιχνίδια. Σε κάθε παιχνίδι μπορεί να στοιχηματίσει οποιοδήποτε αριθμό από τις διαθέσιμες μάρκες, και κερδίζει ή χάνει αυτόν τον αριθμό των μαρκών με πιθανότητες $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$, αντίστοιχα.

Αναπτύσσουμε έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού για να προσδιορίσουμε την βέλτιστη πολιτική του στατιστικού σχετικά με τον αριθμό των μαρκών που πρέπει να στοιχηματίσει σε καθένα από τα τρία παιχνίδια. Η απόφαση σε κάθε παιχνίδι εξαρτάται από τα αποτελέσματα των προηγουμένων παιχνιδιών. Ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η πιθανότητα να κερδίσει ο στατιστικός το στοίχημα.

Έστω $V(i,t)$, η μέγιστη πιθανότητα να έχει ο στατιστικός τουλάχιστον 5 μάρκες μετά το τρίτο παιχνίδι, αν στην αρχή του t-οστού παιχνιδιού ($t=1,2,3$) έχει i μάρκες.

Έστω x_t = αριθμός των μαρκών που στοιχηματίζει ο στατιστικός κατά το t-οστό παιχνίδι ($t=1,2,3$).

Η Εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

$$V(i,t) = \max_{x_t \in \{0,1,\dots,i\}} \left\{ \frac{1}{3} V(i-x_t, t+1) + \frac{2}{3} V(i+x_t, t+1) \right\}, \quad t=1,2,3,$$

$$V(i,4) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \geq 5 \\ 0, & \text{αν } i < 5 \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει τα εξής αποτελέσματα:

$t=3$

i	$V(i,3)$	x_3^*
0	0	—
1	0	—
2	0	—
3	2/3	2 (ή περισσότερα)
4	2/3	1 (ή περισσότερα)
≥ 5	1	0 (ή $\leq i-5$)

$t=2$

$$\frac{1}{3}V(i-x_2)+\frac{2}{3}V(i+x_2)$$

$i \backslash x_2$	0	1	2	3	4	$V(i,2)$	x_2^*
0	0					0	—
1	0	0				0	—
2	0	4/9	4/9			4/9	1 ή 2
3	2/3	4/9	2/3	2/3		2/3	0 ή 2 ή 3
4	2/3	8/9	2/3	2/3	2/3	8/9	1
≥ 5	1						0 (ή $\leq i-5$)

$t=1$

$$\frac{1}{3}V(i-x_1)+\frac{2}{3}V(i+x_2)$$

$i \backslash x_1$	0	1	2	3	$V(i,1)$	x_1^*
3	2/3	20/27	2/3	2/3	20/27	1

Διαπιστώνουμε ότι η βέλτιστη πολιτική είναι :

$x_1^*=1$
- αν κερδίσει, $x_2^*=1$
  - αν κερδίσει, $x_3^*=0$
  - αν χάσει, $x_3^*=2$ ή 3.
- αν χάσει, $x_2^*=1$ ή 2
  - αν κερδίσει, $x_3^*=$
    - 2 ή 3 (για $x_2^*=1$)
    - 1,2,3,4 (για $x_2^*=2$)
  - αν χάσει, το στοίχημα χάνεται.

Αυτή η πολιτική δίνει πιθανότητα ίση με 20/27 να κερδίσει ο στατιστικός το στοίχημα.

Παράδειγμα (ένα μοντέλο για την αγορά μιάς μετοχής)

Έστω S_k είναι η τιμή μιάς συγκεκριμένης μετοχής κατά την k-οστή μέρα, $k \geq 0$. Υποθέτουμε ότι

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1} = S_0 + \sum_{i=1}^{k+1} X_i,$$

όπου $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα f και με πεπερασμένη μέση τιμή. Οι τ.μ. $X_1, X_2, \dots$ είναι ανεξάρτητες της S_0, δηλαδή της αρχικής τιμής της μετοχής. Αυτό το μοντέλο είναι γνωστό ως τυχαίος περίπατος γιά τις τιμές της μετοχής.

Υποθέτουμε ότι έχουμε τη δυνατότητα να αγοράσουμε τη μετοχή σε μία σταθερή τιμή c και μπορούμε να κάνουμε αυτήν την αγορά οποιαδήποτε μέρα εντός ενός διαστήματος N ημερών. Δεν είναι υποχρεωτικό ν' αγοράσουμε τη μετοχή αλλά, αν την αγοράσουμε όταν η τιμή της είναι s, τότε το κέρδος είναι ίσο με s-c. Ποιά πολιτική μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος;

Απάντηση: Έστω $V_n(s)$ το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος όταν η παρούσα τιμή της μετοχής ισούται με s και απομένουν n ημέρες γιά την αγορά της μετοχής. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

$$V_n(s) = \max\left[s-c, \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(s+x) f(x)\,dx \right], \; n \geq 1,$$

με οριακή συνθήκη

$$V_0(s) = \max(s-c, 0).$$

Δεν υπάρχει βέβαια τρόπος να βρούμε μία απλή έκφραση γιά το $V_n(s)$. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι το $V_n(s)$ πληροί μία απλή ιδιότητα που θα μας βοηθήσει να βρούμε τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής.

Λήμμα Η ποσότητα $V_n(s) - s$ είναι φθίνουσα ως προς s.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το λήμμα με επαγωγή ως προς n. Είναι φανερό ότι η έκφραση $V_0(s) - s$ είναι φθίνουσα ως προς s. Υποθέτουμε ότι η έκφραση $V_{n-1}(s) - s$

— είναι φθίνουσα ως προς s. Απο την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού έχουμε ότι:

$$V_n(s) - s = \max\left[-c, \int_{-\infty}^{+\infty}\left[V_{n-1}(s+x) - (s+x)\right]f(x)dx + \mu\right],$$

όπου $\mu = EX_1$. Από την επαγωγική υπόθεση η ποσότητα $V_{n-1}(s+x) - (s+x)$ είναι, γιά κάθε x, φθίνουσα ως προς s. Άρα και η ποσότητα $V_n(s) - s$ είναι φθίνουσα ως προς s. □

Πρόταση. Η βέλτιστη πολιτική έχει την εξής μορφή: Υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $s_1 \leqq s_2 \leqq \dots \leqq s_n \leqq \dots$ τέτοια ώστε, αν απομένουν n ημέρες και η παρούσα τιμή της μετοχής είναι s, τότε πρέπει νά την αγοράσουμε αν και μόνον αν $s \geq s_n$.

Απόδειξη. Αν η τιμή της μετοχής είναι s και απομένουν n ημέρες, από την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού συμπεραίνουμε ότι πρέπει ν' αγοράσουμε τη μετοχή αν

$$V_n(s) = s - c$$

Έστω

$$s_n = \min\{s : V_n(s) - s = -c\} \quad (s_n := \infty, \text{ αν το παραπάνω σύνολο είναι κενό})$$

Από το Λήμμα, γιά $s \geqq s_n$, έχουμε

$$V_n(s) - s \leqq V_n(s_n) - s_n = -c$$

Άρα: $\quad V_n(s) = s - c,$

Συνεπώς σύμφωνα με τη βέλτιστη πολιτική πρέπει ν' αγοράσουμε τη μετοχή αν και μόνον αν $s \geq s_n$. Γιά να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$, $n=1,2,\dots$, είναι αύξουσα ως προς n, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $V_n(s)$ είναι αύξουσα ως προς n. Αυτό όμως ισχύει επειδή όσο αυξάνει ο χρονικός ορίζοντας αυξάνει και το αναμενόμενο ολικό κέρδος. □

Το πρόβλημα, που παραθέτουμε παρακάτω, είναι γνωστό ως το πρόβλημα της Γραμματέως (The Secretary Problem):

Πρόβλημα (Αποδοχή της καλύτερης Προσφοράς)

Υποθέτουμε ότι μας παρουσιάζονται n προσφορές με μία συγκεκριμένη σειρά. Αφού εξετάσουμε μία προσφορά, πρέπει ν' αποφασίσουμε αν θα την αποδεχτούμε (και να σταματήσουμε τη διαδικασία) ή αν θα την απορρίψουμε. Αν μία προσφορά απορριφθεί, αυτόματα χάνεται. Υποθέτουμε ότι η μοναδική πληροφορία που έχουμε οποιαδήποτε στιγμή είναι η σχετική βαθμολογία της παρούσας προσφοράς συγκρινόμενη με τις προηγούμενες. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα να επιλέξουμε την καλύτερη προσφορά όταν όλες οι $n!$ δυνατές διατάξεις των προσφορών είναι ισοπίθανες.

Σ' αυτό το πρόβλημα λέμε ότι βρισκόμαστε στην κατάσταση i αν η i-οστή προσφορά μόλις παρουσιάζεται και είναι η καλύτερη από τις i προσφορές που έχουν παρουσιαστεί.

Έστω $V(i)$ η μέγιστη πιθανότητα αποδοχής της καλύτερης προσφοράς, όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση i. Βλέπουμε ότι

$$V(i) = \max\left[P(i), H(i)\right],$$

όπου $P(i)$ είναι η πιθανότητα να έχουμε την καλύτερη ανάμεσα σε όλες τις προσφορές, αν δεχτούμε την i-οστή προσφορά και $H(i)$ είναι ότι καλύτερο μπορούμε να πετύχουμε αν απορρίψουμε την i-οστή προσφορά. Παρατηρούμε ότι

$$P(i) = P\left(\text{η } i\text{-οστή προσφορά είναι καλύτερη ανάμεσα στις } n \,\middle|\, \text{η } i\text{-οστή προσφορά είναι καλύτερη ανάμεσα στις } i\right)$$

$$= \frac{1/n}{1/i} = \frac{i}{n}$$

Άρα: $$V(i) = \max\left[\frac{i}{n}, H(i)\right], \quad i=1,\dots,n$$

Εύκολα φαίνεται ότι η $H(i)$ είναι η μέγιστη πιθανότητα να αποδεχτούμε την καλύτερη προσφορά ανάμεσα στις n προσφορές, όταν έχουμε απορρίψει τις πρώτες i προσφορές. Συνεπάγεται ότι η $H(i)$ είναι φθίνουσα ως προς i. Αφού η ποσότητα i/n αυξάνει και η ποσότητα $H(i)$ φθίνει ως προς i, συμπεραίνουμε ότι γιά κάποιο j

$$\frac{i}{n} \leq H(i) \quad (i \leq j) \quad \text{και} \quad \frac{i}{n} > H(i) \quad (i > j)$$

Άρα η βέλτιστη πολιτική έχει την ακόλουθη μορφή: Γιά κάποιο j, $j \leq n-1$, απορρίπτουμε τις πρώτες j προσφορές και μετά αποδεχόμαστε την πρώτη υποψήφια προσφορά που εμφανίζεται, όπου μία προσφορά ονομάζεται υποψήφια αν έχει υψηλότερη βαθμολογία από όλες τις προηγούμενες.

Θα βρούμε τώρα (κατά προσέγγιση) τη βέλτιστη πολιτική ανάμεσα στις πολιτικές που έχουν την παραπάνω μορφή. Έστω P_j(καλύτερη) η πιθανότητα ν' αποδεχτούμε την καλύτερη ανάμεσα στις n προσφορές αν ακολουθήσουμε μία πολιτική της παραπάνω μορφής. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P_j(\text{καλύτερη}) = \sum_{i=1}^{n-j} P_j(\text{καλύτερη} \mid \text{δεχόμαστε την } i+j \text{ προσφορά})\, P_j(\text{δεχόμαστε την } i+j \text{ προσφορά})$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_j(\text{καλύτερη} \mid \text{δεχόμαστε την } i+j \text{ προσφορά}) = P(\text{καλύτερη ανάμεσα στις } n \mid \text{καλύτερη ανάμεσα στις } i+j)$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{i+j}} = \frac{i+j}{n}$$

Επίσης,

$$P_j(\text{δεχόμαστε την } i+j \text{ προσφορά})$$

$$= P\left(\begin{array}{l}\text{η καλύτερη προσφορά ανάμεσα στις } j \text{ πρώτες} = \text{η καλύτερη προσφορά ανάμεσα στις } i+j-1 \text{ πρώτες,} \\ \text{η } i+j \text{ προσφορά είναι η καλύτερη ανάμεσα στις } i+j \text{ πρώτες}\end{array}\right)$$

$$= P(\text{η καλύτερη προσφορά ανάμεσα στις } j \text{ πρώτες} = \text{η καλύτερη προσφορά ανάμεσα στις } i+j-1 \text{ πρώτες}) \times P(\text{η } i+j \text{ προσφορά είναι η καλύτερη ανάμεσα στις } i+j \text{ πρώτες})$$

$$= \frac{j}{i+j-1} \cdot \frac{1}{i+j}$$

Άρα: $$P_j(\text{καλύτερη}) = \frac{j}{n} \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i+j-1} = \frac{j}{n} \sum_{k=j}^{n-1} \frac{1}{k} \simeq \frac{j}{n} \int_j^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{j}{n} \log \frac{n-1}{j} \simeq \frac{j}{n} \log \frac{n}{j}$$

Αν θέσουμε $g(x)=\frac{x}{n}\log\frac{n}{x}$, τότε $g'(x)=\frac{1}{n}\log\frac{n}{x}-\frac{1}{n}$

Άρα $g'(x)=0 \Rightarrow \log\frac{n}{x}=1 \Rightarrow x=\frac{n}{e}$

Επίσης, $g\left(\frac{n}{e}\right)=\frac{1}{e}$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η βέλτιστη πολιτική για μεγάλα n, κατά προσέγγιση, αφήνει ένα ποσοστό $1/e$ όλων των προσφορών να περάσουν και μετά αποδέχεται την πρώτη υποψήφια προσφορά. Η πιθανότητα να επιλέξουμε την καλύτερη προσφορά, χρησιμοποιώντας αυτήν την πολιτική, είναι περίπου $1/e$. □

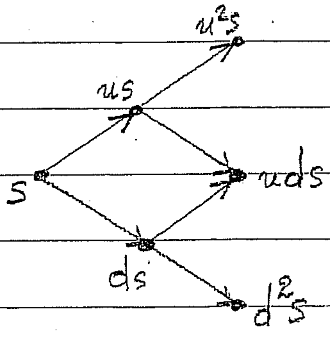
Παράδειγμα (Η τιμολόγηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία μετοχή την οποία έχουμε το δικαίωμα να την πουλήσουμε σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in \{0,1,\dots,n\}$ με τιμή πώλησης K. Αν την χρονική στιγμή t η τιμή της μετοχής ισούται με S_t, η τιμή της S_{t+1} την χρονική στιγμή $t+1$ δίνεται από τον τύπο.

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t & \text{με πιθανότητα } p \\ dS_t & \text{με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

Είναι γνωστό ότι $S_0 = s$.

Σχηματικά, οι πρώτες δύο δυνατές μεταβολές της τιμής της μετοχής φαίνονται παρακάτω:



Έστω $V(i,t)$ το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος που θα έχουμε από ενδεχόμενη πώληση της μετοχής αν βρισκόμαστε στην χρονική στιγμή t, δεν έχουμε εξασκήσει το δικαίωμα πώλησης της μετοχής και μέχρι την χρονική στιγμή t η τιμή της μετοχής έχει πραγματοποιήσει

i $(i=0,1,\dots,t)$ αυξήσεις και $t-i$ μειώσεις. Θέλουμε να βρούμε την ποσότητα $V(0,0)$ καθώς και τη βέλτιστη πολιτική για την εξάσκηση του δικαιώματος πώλησης της μετοχής. Παρατηρούμε ότι

$$V(i,n) = \max\{K - u^i d^{n-i} s,\ 0\},\quad i=0,1,\dots,n$$

Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού δίνεται από τον τύπο:

$$V(i,t) = \max\{K - u^i d^{t-i} s,\ \beta p V(i+1,t+1) + \beta\cdot(1-p) V(i,t+1)\},$$
$$t=0,\dots,n-1,\quad i=0,\dots,t.$$

Ο συντελεστής $\beta<1$ είναι ο αποπληθωριστικός παράγοντας. Η ποσότητα $K-u^i d^{t-i} s$ αντιστοιχεί στην ενέργεια της πώλησης της μετοχής ενώ η ποσότητα $\beta p V(i+1,t+1)+\beta(1-p)V(i,t+1)$ αντιστοιχεί στην ενέργεια της μη άσκησης του δικαιώματος πώλησης της μετοχής κατά την χρονική στιγμή t.

Αριθμητικό Παράδειγμα: Έστω $u=1.0694$, $d=0.9351$, $p=0.5056$, $K=10$, $1-p=0.4944$, $\beta=0.997$, $n=5$, $s=9$. Οι δυνατές τιμές της μετοχής κατά την χρονική στιγμή 5 είναι

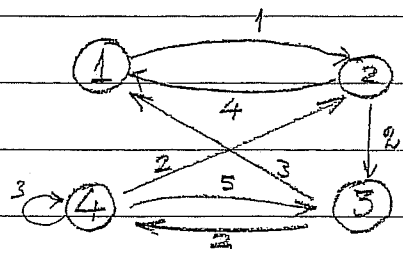
$$9d^5 = 6.435$$
$$9ud^4 = 7.359$$
$$9u^2d^3 = 8.416$$
$$9u^3d^2 = 9.625$$
$$9u^i d^{5-i} > 10,\quad i=4,5$$

Συνεπώς: $V(0,5)=3.565$, $V(1,5)=2.641$, $V(2,5)=1.584$, $V(3,5)=0.375$
$V(i,5)=0$, $i=4,5$.

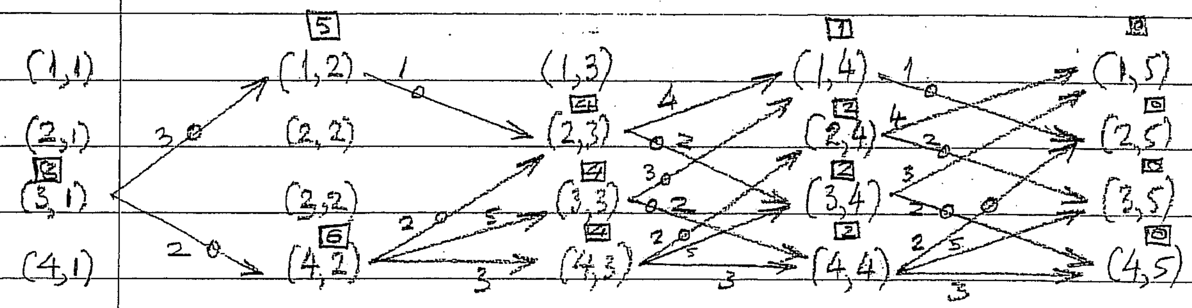
Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού δίνει τα εξής αποτελέσματα:

για $t=4$: $V(0,4)=3.119$, $V(1,4)=2.13$, $V(2,4)=1$, $V(3,4)=0.18$, $V(4,4)=0$
για $t=3$: $V(0,3)=2.641$, $V(1,3)=1.584$, $V(2,3)=0.58$, $V(3,3)=0.089$
για $t=2$: $V(0,2)=2.130$, $V(1,2)=1.075$, $V(2,2)=0.333$
για $t=1$: $V(0,1)=1.592$, $V(1,1)=0.698$
για $t=0$: $V(0,0)=1.137$

Παράδειγμα: Θεωρούμε το παρακάτω δίκτυο. Επιτρέπεται να κινηθούμε μόνο κατά μήκος των ακμών και επιθυμούμε να προσδιορίσουμε την ελάχιστη διαδρομή που ξεκινά από τον κόμβο 3 και αποτελείται από 4 ακριβώς βήματα.



Λύση: Ορίζουμε τα ζεύγη (x,t), $t=1,2,\dots,5$, $x=1,2,3,4$, όπου (x,t) συμβολίζει το γεγονός ότι στην αρχή του βήματος t το σύστημα βρίσκεται στον κόμβο x. Το πρόβλημα ανάγεται σ' ένα απλό πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής με το παρακάτω δίκτυο



Η επίλυση της εξίσωσης βελτιστοποίησης και κατ' επέκταση η εύρεση ελάχιστης διαδρομής γίνεται αναδρομικά με τη βοήθεια του παραπάνω αναλυτικού δικτύου, όπου οι αριθμοί σε τετράγωνα είναι οι αντίστοιχες βέλτιστες τιμές ενώ τα βέλη με κύκλους συμβολίζουν τις αντίστοιχες βέλτιστες διαδρομές.

Επομένως το μήκος της ελάχιστης διαδρομής είναι 8, και αυτό αντιστοιχεί στις παρακάτω ελάχιστες διαδρομές.

$$3 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 4$$

$$3 \xrightarrow{2} 4 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{2} 3 \xrightarrow{2} 4$$

□

Παράδειγμα. Μία αυτοκινητοβιομηχανία έχει εργοστάσια σε 5 χώρες $X_1, \dots, X_5$ και σκέπτεται να τα επεκτείνει. Το συνολικό ύψος της επένδυσης είναι 6 εκατ. ευρώ, ενώ το κόστος K_t και η απόδοση A_t γιά κάθε χώρα, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα (σε εκατ. ευρώ)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Κόστος	2	4	3	1	5
Απόδοση	3	7	5	3	7

Κάθε εργοστάσιο μπορεί να επεκταθεί το πολύ μία φορά. Ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική επένδυσης, δηλαδή αυτή που μεγιστοποιεί τη συνολική απόδοση.

Απάντηση. Εισάγουμε τεχνητά τον χρόνο: Θεωρούμε ότι η αυτοκινητοβιομηχανία αποφασίζει πρώτα αν θα επενδύσει ή όχι στην X_1, μετά στην X_2 κ.ο.κ. μέχρι τέλος στην X_5.

Ορίζουμε $v(x,t)$, $t = 1, 2, \dots, 5$ ως τη μέγιστη συνολική απόδοση αν έχει απομείνει κεφάλαιο x γιά επένδυση στην χώρα t. Η εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού είναι η εξής:

$$v(x,t) = \max\{0 + v(x,t+1),\ A_t + v(x-K_t, t+1)\},\quad t=1,2,\dots,5,\ x \geq K_t,$$

$$v(x,t) = v(x,t+1),\quad t=1,2,\dots,5,\ x<K_t$$

$$v(x,6) = 0,\quad x = 0,1,\dots,6$$

Οι υπολογισμοί μπορούν να συστηματικοποιηθούν με τη βοήθεια του επόμενου πίνακα, όπου οι βέλτιστες τιμές $v(x,t)$ υπολογίζονται αναδρομικά γιά $t=5,4,\dots,1$, αφού έχουν πρώτα προσδιοριστεί τα στοιχεία όλων των προηγούμενων στηλών.

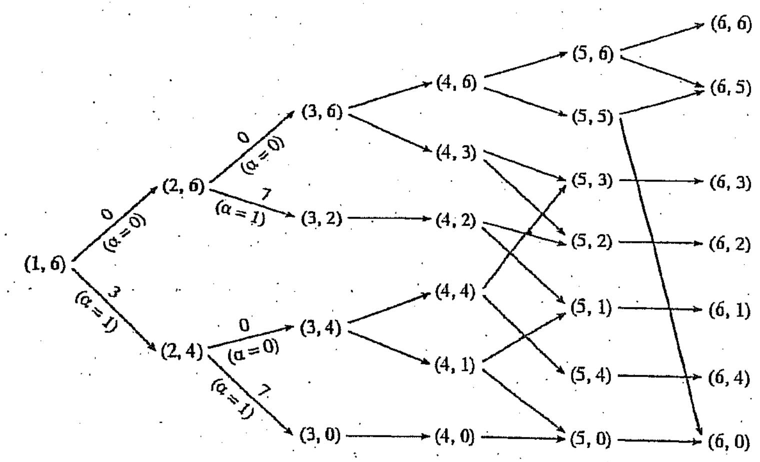
t	x	α	R(x, α)	ᾱ(x)	υ(t, x)
1	6	0	0	6	0 + 10 = 10
		1	3	4	3 + 8 = 11*
2	4	0	0	4	0 + 8 = 8*
		1	7	0	7 + 0 = 7
	6	0	0	6	0 + 10 = 10*
		1	7	2	7 + 0 = 7
3	0	0	0	0	0 + 0 = 0*
	2	0	0	0	0 + 0 = 0*
	4	0	0	4	0 + 3 = 3
		1	5	1	5 + 3 = 8*
	6	0	0	6	0 + 10 = 10*
		1	5	3	5 + 3 = 8
4	0	0	0	0	0 + 0 = 0*
	1	0	0	1	0 + 0 = 0
		1	3	0	3 + 0 = 3*
	3	0	0	3	0 + 0 = 0
		1	3	2	3 + 0 = 3*
	4	0	0	4	0 + 0 = 0
		1	3	3	3 + 0 = 3*
	6	0	0	6	0 + 7 = 7
		1	3	5	3 + 7 = 10*
5	0	0	0	0	0*
	1	0	0	1	0*
	2	0	0	2	0*
	3	0	0	3	0*
	4	0	0	4	0 + 0 = 0*
	5	0	0	5	0 + 0 = 0*
		1	7	0	7 + 0 = 7*
	6	0	0	6	0 + 0 = 0
		1	7	1	7 + 0 = 7*
6	0	–	–	–	0
	1				0
	2				0
	3				0
	4				0
	5				0
	6				0

Επομένως η μέγιστη δυνατή απόδοση είναι 11 εκατ. ευρώ, και αυτή πετυχαίνεται μέσω της ακολουθίας αποφάσεων

$$(1,6) \xrightarrow{\alpha=1} (2,4) \xrightarrow{\alpha=0} (3,4) \xrightarrow{\alpha=1} (4,1) \xrightarrow{\alpha=1} (5,0) \xrightarrow{\alpha=0} (6,0),$$

δηλαδή με επένδυση στις χώρες X_1, X_3 και X_4.

Ο εναλλακτικός τρόπος επίλυσης, είναι να θεωρήσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα μέγιστης διαδρομής με δίκτυο



και να επιλύσουμε αυτό. □

[*Ασκήσεις:* 3.4 - 3.5]

Άσκηση 4. Μία εταιρία έχει αποφασίσει να χρησιμοποιήσει διαφήμιση για την προώθηση των προϊόντων της, χρησιμοποιώντας ένα από τα Μ.Μ.Ε.: ραδιόφωνο, τηλεόραση ή τύπο. Το εβδομαδιαίο κόστος διαφήμισης είναι 200, 900 και 300 χιλιάδες ευρώ για ραδιόφωνο, τηλεόραση και τύπο αντίστοιχα. Ο εβδομαδιαίος όγκος πωλήσεων κατατάσσεται ως 1: χαμηλός, 2: μέτριος, 3: υψηλός. Οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση, ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο διαφημιστικό μέσο, δίνονται από τους πίνακες

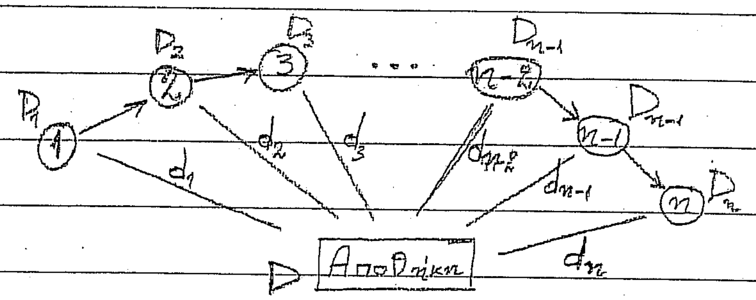
(Ραδιόφωνο) $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$ (Τηλεόραση) $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array}$ (Τύπος) $\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$

Τα αντίστοιχα εβδομαδιαία κέρδη (σε χιλιάδες ευρώ), δίνονται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 400 & 350 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί βέλτιστη διαφημιστική πολιτική για τις επόμενες τρείς εβδομάδες.

Άσκηση 5



Θεωρούμε ότι ένα φορτηγό προμηθεύει ένα προϊόν σε n καταστήματα. Το i-οστό κατάστημα πρέπει να προμηθευτεί με D_i τεμάχια του προϊόντος, $i=1,\dots,n$. Η ποσότητα που προμηθεύεται το φορτηγό από την αποθήκη ισούται με D, όπου $D \geq \max_{1\le i\le n} D_i$. Η απόσταση του $(i+1)$-καταστήματος από το i-κατάστημα ισούται με $d_{i,i+1}$, $i=1,\dots,n-1$. Η απόσταση του i-καταστήματος από την αποθήκη ισούται με d_i, $i=1,\dots,n$. Τα καταστήματα προμηθεύονται το προϊόν κατ' αύξουσα σειρά. Το πρόβλημα είναι η εύρεση της ελάχιστης διαδρομής από την αποθήκη μέχρι το n-οστό κατάστημα.

Άσκηση 6 Μία εταιρία πρόκειται να εισάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Αν οι πωλήσεις είναι υψηλές τον παρόντα μήνα, θα παραμείνουν υψηλές και τον επόμενο μήνα με πιθανότητα 0.5, ενώ αν δεν είναι υψηλές, θα γίνουν υψηλές τον επόμενο μήνα με πιθανότητα 0.2. Η εταιρία μπορεί να βελτιώσει τις μηνιαίες πωλήσεις μέσω διαφημιστικής καμπάνιας και τότε οι προηγούμενες πιθανότητες αυξάνουν σε 0.8 και 0.4 αντίστοιχα.

Αν δεν χρησιμοποιηθεί διαφήμιση και οι πωλήσεις είναι υψηλές, τα μηνιαία έσοδα της εταιρίας (σε εκατομμύρια ευρώ) έχει εκτιμηθεί ότι θα είναι 10 και 4, ανάλογα αν τον επόμενο μήνα οι πωλήσεις παραμείνουν υψηλές ή όχι. Αν όμως οι πωλήσεις είναι χαμηλές, τότε τα αντίστοιχα κέρδη είναι 7 και -2 (ζημία). Με τη χρησιμοποίηση της διαφήμισης, οι παραπάνω τέσσερις αριθμοί γίνονται 7, 6 και 3, -5 αντίστοιχα. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού και να γραφεί η αντίστοιχη εξίσωση.

Άσκηση 7 Ένα δοχείο αρχικά περιέχει n άσπρες και m μαύρες μπάλλες. Βγάζουμε κατά τυχαίο τρόπο και χωρίς επανάθεση μία-μία τις μπάλλες από το δοχείο. Αν επιλεγεί μία άσπρη μπάλλα τότε κερδίζουμε δύο χρηματικές μονάδες ενώ αν επιλεγεί μία μαύρη μπάλλα χάνουμε τρεις χρηματικές μονάδες. Οποιαδήποτε στιγμή έχουμε το δικαίωμα να εγκαταλείψουμε το παιχνίδι. Ο στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το αναμενόμενο συνολικό κέρδος. Εξηγήσατε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί το πρόβλημα με την μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

Άσκηση 8 Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων μιάς διαδικασίας είναι το $S = \{(x,y) : x,y$ μη αρνητικοί ακέραιοι με την ιδιότητα $x+y \leq N\} \setminus \{(0,0)\}$, όπου N είναι ένας φυσικός αριθμός.

Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση (x,y) με $x+y<N$ μπορούμε να προβούμε στην ενέργεια 0 ή στην ενέργεια 1.

Η ενέργεια 0 μεταφέρει τη διαδικασία στην κατάσταση $(x,y+1)$ με πιθανότητα $y/(x+y)$ ή στην κατάσταση $(x+1,y)$ με πιθανότητα $x/(x+y)$. Το αντίστοιχο αναμενόκόστος είναι ίσο με $x/(x+y)$.

Η ενέργεια 1 μεταφέρει τη διαδικασία στην κατάσταση $(x,y+1)$ με πιθανότητα 1. Το αντίστοιχο κόστος είναι ίσο με K, όπου K είναι μία θετική σταθερά.

Η διαδικασία λήγει όταν $x+y=N$.

Το πρόβλημα είναι η εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος όταν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι μία κατάσταση (x,y) τέτοια ώστε $x+y<N$.

[α] Βρείτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα.

[β] Τρέξτε ένα κατάλληλο πρόγραμμα στον υπολογιστή που να λύνει το πρόβλημα για διάφορες τιμές των παραμέτρων N, k.

[γ] Τι εικάζετε για τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής;

Σημείωση: Το παραπάνω μοντέλο έχει την εξής οικολογική ερμηνεία: Υποθέτουμε ότι οι πληθυσμοί δύο ανταγωνιζόμενων ειδών εμβίων όντων αναπτύσσονται σ' ένα βιότοπο με μέγιστη συνολική χωρητικότητα ίση με N. Κάποιο από τα είδη θεωρείται βλαβερό ενώ το άλλο είδος θεωρείται αβλαβές. Η παρουσία κάθε όντος του βλαβερού είδους προξενεί ένα κόστος, που το θεωρούμε ίσο με τη μονάδα κόστους. Θεωρούμε πολιτικές που οποιαδήποτε στιγμή μπορούν να εισάγουν στον βιότοπο το αβλαβές είδος σε βάρος του βλαβερού είδους. Το κόστος της εισαγωγής στον βιότοπο κάθε εμβίου όντος του αβλαβούς είδους είναι ίσο με $K>0$. Μας ενδιαφέρει η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής που πρέπει ν' ακολουθήσουμε για κάθε αρχική κατάσταση (x,y), $x+y<N$, όπου: $x=\#$ εμβίων όντων του βλαβερού είδους και

$y=\#$ εμβίων όντων του αβλαβούς είδους.

Άσκηση 9 Έστω ότι το σύνολο των καταστάσεων μιάς διαδικασίας είναι το

$$S=\{(x,y):\ x,y \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}\}\setminus\{(0,0)\}$$

Όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση (x,y) με $xy\neq 0$ μπορούμε να προβούμε στην ενέργεια 0 ή στην ενέργεια 1.

Η ενέργεια 0 μεταφέρει τη διαδικασία στην κατάσταση $(x-1,y+1)$ με πιθανότητα $x/(x+\rho)$ ή στην κατάσταση $(x,y-1)$ με πιθανότητα $\rho/(x+\rho)$; όπου ρ είναι μία θετική σταθερά. Το αντίστοιχο αναμενόμενο κόστος είναι ίσο με $x/(x+p)$.

Η ενέργεια 1 μεταφέρει τη διαδικασία στην κατάσταση $(x, y-1)$ με πιθανότητα 1. Το αντίστοιχο κόστος είναι ίσο με K, όπου K είναι μία θετική σταθερά.

Η διαδικασία λήγει όταν $x=0$ ή $y=0$.

Το πρόβλημα είναι η εύρεση της πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος όταν η αρχική κατάσταση της διαδικασίας είναι μία κατάσταση (x,y), τέτοια ώστε $xy \neq 0$.

[α] Βρείτε την εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού για το παραπάνω πρόβλημα.

[β] Τρέξτε ένα κατάλληλο πρόγραμμα στον υπολογιστή που να λύνει το πρόβλημα για διάφορες τιμές της αρχικής κατάστασης (x,y).

[γ] Τι εικάζετε για τη μορφή της βέλτιστης πολιτικής;

Σημείωση: Το παραπάνω μοντέλο έχει την εξής επιδημιολογική ερμηνεία:

Έστω (x,y) η κατάσταση κατά την οποία

x = # ατόμων που μπορούν να προσβληθούν από μία μεταδοτική ασθένεια.

και y = # ατόμων που έχουν προσβληθεί από την ασθένεια.

Η προσβολή ενός ατόμου από την ασθένεια επιφέρει ένα κόστος, που το θεωρούμε ίσο με τη μονάδα κόστους. Θεωρούμε πολιτικές που οποιαδήποτε στιγμή μπορούν να απομονώσουν οποιοδήποτε αριθμό ατόμων που έχουν προσβληθεί από την ασθένεια. Το κόστος για την απομόνωση κάθε ατόμου είναι ίσο με K.