ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΈΡΕΥΝΑΣ, ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΟΠΑ, 2020-2021

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4 ΣΕΛΙΔΑ 40</u>

(ΑΠΟ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΈΡΕΥΝΑ», ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ , ΕΚΔ. ΣΥΜΕΩΝ, ΑΘΗΝΑ 2012)

Έστω Α, Β, Γ και Δ οι μονάδες που παράγονται από κάθε προϊόν. Τότε έχουμε:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{maximize } P = 40A + 24B + 36\Gamma + 23\Delta$$

Υπό τους περιορισμούς:

$2A + 1B + 2.5\Gamma + 5\Delta \le 1{,}200$	(Δυναμικότητα φρεζαρίσματος)
$1A + 3B + 2.5\Gamma \le 1{,}600$	(Δυναμικότητα συναρμολόγησης)
$10A + 5B + 2\Gamma + 12\Delta \le 10{,}000$	(Περιορισμός πρώτων υλών)
$A \le 200$	(Ζήτηση για το Α)
$\Gamma \le 160$	(Ζήτηση για το Γ)
$\Delta \ge 100$	(Απαίτηση για το Δ)
$A, B, \Gamma, \Delta \ge 0$	(Περιορισμοί μη αρνητικότητας)

by default στην R

coef_obj = (40, 24, 36, 23)

το πρόβλημα σε μορφή πίνακα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2.5 & 5 \\ 1 & 3 & 2.5 & 0 \\ 10 & 5 & 2 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A\text{ :matrix}} \underline{x} \begin{matrix} \text{"}\le\text{"} \\ \text{"}\le\text{"} \\ \text{"}\le\text{"} \\ \text{"}\le\text{"} \\ \text{"}\le\text{"} \\ \text{"}\ge\text{"} \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1200 \\ 1600 \\ 10000 \\ 200 \\ 160 \\ 100 \end{bmatrix}}_{\text{beta\_vec}}$$

direction_rhs
η R ζητά σε διάνυσμα τις φορές των ανισώσεων

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ \Gamma \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ R:

```r
#EXAMPLE WITH SENSITIVITY ANALYSIS
library(lpSolve)
A<-matrix(c(2,1,2.5,5,1,3,2.5,0,10,5,2,12,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1),nrow=6,byrow=TRUE) #matrix of the constrair
coef_obj<-c(40,24,36,23)
direction_rhs<-c("<=","<=","<=","<=","<=",">=")
beta_vec<-c(1200,1600,10000,200,160,100)
lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec) # optimal value of the objective function
lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec)$solution # optimal values of the variables

lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$sens.coef.from #sensitivity coefficients lower
lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$sens.coef.to #sensitivity coefficients upper bc

# Dual Values/ SHADOW PRICES (first dual of the constraints and then dual of the variables)
lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals


# Duals/SHADOW PRICES lower and upper limits
lp("max", coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals.from
lp("max", coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals.to
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ:

```
Success: the objective function is 18300
> lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec)$solution # optimal values of the variables
[1] 100 500   0 100
>
```

<u>Εικόνα 1:</u> Μέγιστη τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης: 18300 χρηματικές μονάδες

Βέλτιστη λύση: Α=200, Β=500,Γ=0, Δ=100 μονάδες προϊόντος

Η εντολή για να λύσουμε π.γ.π είναι η lp(…) με στοιχεία εισόδου (arguments) κατά σειρα: την ένδειξη "max" ή "min" , τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, τον πίνακα A των συντελεστών των περιορισμών, το διάνυσμα με την φορά των ανισώσεων, το διάνυσμα με τα δεξιά μέλη των περιορισμών b (right hand side- rhs) και το διάνυσμα με τους δείκτες των ακέραιων μεταβλητών. Για περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να πληκτρολογείσετε help(lp) ή ?lp στο παράθυρο Console (Rstudio).

```
> lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$sens.coef.from #sensitivity coefficients lower b
ound
[1] 2.4e+01  2.0e+01 -1.0e+30 -1.0e+30
> lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$sens.coef.to #sensitivity coefficients upper bou
nd
[1] 48 97 52 96
```

Εικόνα 2: Επιτρεπτά όρια για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης

Στην εικόνα 2 , π.χ. αν ο συντελεστής του Α στην αντικειμενική συνάρτηση αλλάξει, αλλά παραμείνει εντός των ορίων 24 και 48 , τότε η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει! Προφανώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα αλλάξει γιατί θα πολλαπλασιάσω το A=500 με διαφορετικό συντελεστή.

```
> # Dual Values/ SHADOW PRICES (first dual of the constraints and then dual of the variables)
> lp("max",coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals
 [1]  19.2   1.6   0.0   0.0   0.0 -73.0   0.0   0.0 -16.0
[10]   0.0
>
>
> # Duals/SHADOW PRICES lower and upper limits
> lp("max", coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals.from
 [1]  1.033333e+03  1.100000e+03 -1.000000e+30 -1.000000e+30
 [5] -1.000000e+30  6.666667e+01 -1.000000e+30 -1.000000e+30
 [9] -1.000000e+02 -1.000000e+30
> lp("max", coef_obj,A,direction_rhs,beta_vec, compute.sens=TRUE)$duals.to
 [1] 1.366667e+03 2.100000e+03 1.000000e+30 1.000000e+30
 [5] 1.000000e+30 1.333333e+02 1.000000e+30 1.000000e+30
 [9] 1.000000e+02 1.000000e+30
```

shadow Prices

Reduced cost

Εικόνα 3: Shadow prices για περιορισμούς και μεταβλητές κατά σειρά

Για παράδειγμα, αν αυξήσουμε το δεξί μέλος του 1ου περιορισμού κατά μία μονάδα(1201) , τότε το μέγιστο κέρδος (μέγιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης) θα αυξηθεί κατά 19,2. Αν αυξήσουμε κατά δύο μονάδες(1202), τότε το μέγιστο κέρδος θα αυξηθεί κατά 19,2·2=38,4 κ.ο.κ. Αν μειώσουμε κατά μία μονάδα, τότε θα συμβεί μείωση στο συνολίκο κέρδος κατά 19,2 κ.ο.κ.

Μέχρι πόσες μονάδες μπορούμε να αυξήσουμε/μειώσουμε το δεξί μέλος του 1ου περιορισμού ; Αυτό φαίνεται στα Duals/SHADOW PRICES lower and upper limits! Συγκεκριμένα για τον 1ο περιορισμό αν μειώσουμε μέχρι το δεξί μέλος να γίνει 1033 ή αυξήσουμε μέχρι 1367 η αλλαγή στην μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι 19,2 επί το πλήθος των μονάδων της μεταβολής. Αν ξεπεράσουμε αυτά τα όρια , δεν θα μπορούμε να γνωρίζουμε την αλλαγή στο αποτέλεσμα και θα πρέπει να ξαναλύσουμε το πρόβλημα από την αρχή!

Οι περιορισμοί μας είναι συνολικά 6. Επομένως το τελευταίο shadow price είναι το -73(που σημαίνει ότι αν αυξήσουμε κατα 1 τον περιορισμό 100 για το Δ τότε το maxz=maxP θα μειωθεί κατα 73 μονάδες). Οι επόμενοι αριθμοί αποκαλούνται REDUCED COST και ουσιαστικά δείχνουν την αλλαγή στην τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αν απαιτήσουμε να παράγεται ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 1 μονάδα από το αντίστοιχο προϊόν (δηλαδή έχουμε $x_i \geq 1$ αντί του $x_i \geq 0$ που έχουμε συνήθως ως τελευταίους περιορισμούς). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αν απαιτήσουμε για το προϊόν Γ≥1 αντι του Γ≥0 , τότε το μέγιστο κέρδος θα μειωθεί κατα 16 μονάδες(προσέξτε ότι η βέλτιστη λύση έχει Γ=0, οπότε δεν μας συμφέρει να παράγουμε προϊόντα Γ- αν ωστόσο είμασταν υποχρεωμένοι να παράγουμε έστω κι ένα , τότε θα είχαμε μείωση στο συνολικό κέρδος).

ΘΑΝΑΣΗΣ ΜΠΑΛΗΣ