ΕΡΓΑΣΙΑ 2^{η}

Άσκηση 1

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας A:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 12 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

1.1 Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

1.2 Να βρεθεί μία βάση του μηδενόχωρου του A.

1.3 Έστω $b=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & 9\end{pmatrix}^T$. Περιγράψτε τις λύσεις του συστήματος $Ax=b$ ως $x_{ειδική}+\mathrm{Span}(v_1,...,v_k)$ για κατάλληλα $x_{ειδική}$ και ανεξάρτητα $v_1,...,v_k$. Τι είδους χώρος είναι το σύνολο των λύσεων του $Ax=b$; Είναι υπόχωρος; Γιατί;.

1.4 Να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του μηδενόχωρου του A.

1.5 Να βρεθεί μία βάση του αριστερού μηδενόχωρου του A.

1.6 Θεωρούμε το σύστημα $Ax=b$. Να βρεθεί βάση του συνόλου των $b\in\mathbb{R}^4$ για τα οποία υπάρχει $x\in\mathbb{R}^5$, τέτοιο που $Ax=b$;

1.7 Έστω $a=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$, η πρώτη γραμμή του A και $U=\mathrm{Span}(a)$. Να βρεθεί μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του U.

Άσκηση 2

2.1 Έστω A ένας 3×9 πίνακας. Η απεικόνιση $f(x)=Ax$, $f:\mathbb{R}^9\to\mathbb{R}^3$ θα είναι σίγουρα «επί»; <u>Εξηγείστε γιατί</u>.

2.2 Έστω D ένας 6×3 πίνακας. Η απεικόνιση $f(x)=Dx$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^6$ θα είναι σίγουρα «μονοσήμαντη»; <u>Εξηγείστε γιατί</u>.

Άσκηση 3

Έστω $a_1 := (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T$, $a_2 := (1 \quad -1 \quad 1 \quad 0)^T$,

$a_3 := (1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)^T$ και $a_4 := (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T$

Αν h ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τον $\mathbb{R}^4$ στον $\mathbb{R}^4$, τέτοιος που:

$$h(a_1) = a_4, h(a_2) = a_3, h(a_3) = a_1, h(a_4) = a_2$$

Να βρεθεί πίνακας C τέτοιος ώστε $h(x) = Cx$. (Αρκεί να δώσετε τον C ως γινόμενο κάποιων κατάλληλων πινάκων, και ενδεχομένως αντιστρόφων τους, χωρίς να κάνετε πράξεις για να βρείτε τον C).